fnodorov.github.io

Основы. Теория Групп

Группа G — мн-во с бинарной операц.
1) $a(bc)=(ab)c$
2) $\exists 1\in G,\ \forall g\in G:\ 1g=g\cdot 1=g$
3) $\forall g\in G,\ \exists g^{-1}\in G:\ gg^{-1}=g^{-1}g=1$

Подгруппа $H<G$ — подмножество группы, имеющие все свойства групп

Смежные классы

$G = Hg_1+\dots+Hg_n,\quad n=|G|,\ g_i\in G$

$Hg_1=\{h_i g_1,\ h_i\in H,\ i=1,\dots m\}$

$m=|H|$

Th. Лагранжа: ПСК не пересекаются или совпадают

□ $g\in Hg_1 \Rightarrow g=h_1 g_1$

$g\in Hg_2 \Rightarrow g=h_2 g_2$

$\Rightarrow g_1=h_1^{-1}h_2 g_2$

$hg_1 = hh_1^{-1}h_2 g_2$

перебирая h: $Hg_1<Hg_2$

Аналогично $\Rightarrow$ $Hg_2<Hg_1$ $\Big| \Rightarrow Hg_1=Hg_2$ ■

Следствие 1: $|G| \vdots |H|$

Индекс подгруппы в группе — число различных ПСК $|G:H|$

Следствие 2: $|G:H|=\dfrac{|G|}{|H|}$

Инвариантная подгруппа — если $\forall g\in G:\ H=gHg^{-1}$ $\quad H\lhd G$

мн-во ПСК

1. Ассоц. $(Hg_1)(Hg_2)=H(g_1g_2)$
2. $\exists 1$, $H\cdot 1=\mathbb{1}$
3. $Hg^{-1}\overset{?}{=}(Hg)^{-1}=g^{-1}H=Hg^{-1}$

$(Hg^{-1})(Hg)=H(g^{-1}g)=\mathbb{1}$

ПСК образуют группу G/H фактор-группу

Сопряженные элементы

$a\sim b$, если $\exists g\in G:\ a=gbg^{-1}$

Свойства:
1) $a\sim a$ (рефлексивн)
2) $a\sim b \Rightarrow b\sim a$, (симм)
3) $a\sim b,\ b\sim c \Rightarrow a\sim c$ (транзит)

"$\sim$"- отношение эквивалентн

Класс сопряженных элементов (КСЭ) мн-во всех эл-тов G, сопряж. данн.

Геометр. правило
1) Повороты на один и тот же угол сопряжены $\Leftrightarrow$ в группе есть эл-т, переводящ. одну ось в другую
2) Повороты вокруг одной оси на $+\varphi$ и $-\varphi$ сопряжены $\Leftrightarrow$
   а) имеется $C_2\perp C_n$
   б) имеется σ_v

Представление

матрица $n\times n$

— это гомоморфизм $G\to D(g)$

$g_1,g_2\in G \Rightarrow D(g_1 g_2)=D(g_1)\cdot D(g_2)$

Точное представление

— // — Изоморфизм — // —

Размерность: $\dim D(g)$ — размер матрицы

Прямая сумма:

$$D(g)=D^{(1)}(g)\oplus D^{(2)}(g)=\begin{pmatrix} D_1(g) & 0\\ 0 & D_2(g)\end{pmatrix}$$

$\dim D=\dim D^{(1)}+\dim D^{(2)}$

Эквивалентность:

$\exists V \mid D_1(g)=VD_2(g)V^{-1}$

Приводимость:

$$D(g)\sim D^{(1)}(g)\oplus D^{(2)}(g)=\begin{pmatrix} D^{(1)} & 0\\ 0 & D^{(2)}\end{pmatrix}$$

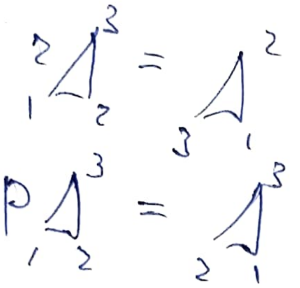
Цель: Разложить представл. в прямую сумму неприводимых

Задачи

Группа треугольника D_3

$D_3 = \{1, z, z^2, p, pz, pz^2\}$

$z^3 = p^2 = 1, \quad (pz)^2 = 1$



$z \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$p \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad D_3 \simeq P_3$

Таблица умножения

1	z	z^2	p	pz	pz^2
z	z^2	1	pz^2	p	pz^2
z^2	1	z	pz	pz^2	p
p	pz	pz^2	1	z	z^2
pz	pz^2	p	z^2	1	z
pz^2	p	pz	z	z^2	1

$(pz)^2 = 1 \quad p|pzpz = 1$

$zpz = p|z^2 \quad zp = pz^2$

$pz = zp$

Свойства:

1. В каждой строке есть все элементы группы
2. Везде в разном порядке
3.

Таблица НП Δ

$D_3 / C_3 \simeq C_2$

σ_1 $\boxed{1}$

σ_2 $\boxed{z \mid z^2}$

σ_3 $\boxed{p \mid pz \mid pz^2}$

Ортогональность

$$\sum_{g\in G} \left[D^{(\alpha)}_{ij}(g)\right]^* D^{(\beta)}_{kl}(g) = \frac{|G|}{n_\alpha}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ik}\delta_{jl}$$

$V_1 = (1\,1\,1\,1\,1\,1) \quad V_1^2 = 6 = \frac{6}{1}$

$V_2 = (1\,1\,1\,-1\,-1\,-1) \quad V_2^2 = 6 = 6/1$

$V_4 = (0\;-\frac{\sqrt3}{2}\;\frac{\sqrt3}{2}\;0\;\frac{\sqrt3}{2}\;-\frac{\sqrt3}{2}) \quad V_4^2 = 4\cdot\frac{3}{4} = 3$

$V_3 = (1\;-\frac12\;-\frac12\;-1\;\frac12\;\frac12) \quad V_3^2 = (1+\frac14+\frac14)2 = \frac{6}{2}$

	1	z	z^2	p	pz	pz^2
D_1	1	1	1	1	1	1
D_2	1	1	1	-1	-1	-1
D_3	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac12&-\frac{\sqrt3}{2}\\\frac{\sqrt3}{2}&-\frac12\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac12&\frac{\sqrt3}{2}\\-\frac{\sqrt3}{2}&-\frac12\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ...		

Характеры. Теория

Свойства представлений:

1. Все НП абелевой группы одномер.
2. кол-во НП неэквивалентных равно числу КСЭ
3. Сумма квадратов размерностей НП равна порядку группы

$$\sum n_\alpha^2 = |G|, \quad n_\alpha = \dim D^{(\alpha)}(g)$$

4. Представление фактор-группы есть представл. исходной группы
5. Если матрix A коммутирует со всеми матрix НП, то она скалярная: $A = \lambda E$
6. Если $D^{(1)}(g) A = A D^{(2)}(g)$, то
   либо $A = 0$
   либо $\dim D^{(1)} = \dim D^{(2)}$, $D^{(1)} \sim D^{(2)}$
7. Соотношение ортогональности

$$\sum_{g\in G} [D^{(\alpha)}_{ij}(g)]^* D^{(\beta)}_{kl}(g) = \frac{|G|}{n_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} \delta_{jl}$$

$$n_\alpha = \dim D^{(\alpha)}(g)$$

Теория характеров

$$\chi(g) = \operatorname{Tr} D(g)$$

Свойства:

1. Характеры эквивал. представл. совпадают

$$\chi(g) = \operatorname{Tr} D(g) = \operatorname{Tr}(V D(g) V^{-1}) = \operatorname{Tr} D(g)$$

2. Характер есть функция КСЭ

$$a \sim b \Rightarrow \chi(a) = \chi(b)$$

$$\chi(a) = \operatorname{Tr} D(a) = \operatorname{Tr}(D(g b g^{-1})) =$$

$$= \operatorname{Tr}(D(g) D(b) D(g^{-1})) = \chi(b)$$

3. Ортогональность

$$\left.\begin{matrix} i=j \\ k=l \end{matrix}\right| \delta_{ij}\delta_{kl}$$

$$\sum_{g\in G} \chi^*_\alpha(g) \chi_\beta(g) = \frac{|G|}{\cancel{n_\alpha}} \cdot \cancel{n_\alpha} \delta_{\alpha\beta} = |G| \cdot \delta_{\alpha\beta} \ldots$$

или

$$\sum_{\sigma_k} p_k \chi^*_\alpha(\sigma_k) \chi_\beta(\sigma_k) = |G| \delta_{\alpha\beta}$$

$$p_k = |\sigma_k|$$

4. $D(g)$ – исходное пр-е
   $D^{(\alpha)}(g)$ – НП

$$D(g) = \bigoplus_\alpha k_\alpha D^{(\alpha)}(g), \quad k_\alpha \in \mathbb{N}$$

$$\chi^*_\alpha \chi(g) = \chi^*_\alpha \sum_\beta k_\beta \chi_\beta(g)$$

$$\Rightarrow \sum_{g\in G} \chi^*_\alpha(g) \chi_\beta(g) = \sum_{g\in G} \sum_\beta k_\beta \chi^*_\alpha(g) \chi_\beta(g) =$$

$$= \sum_\beta k_\beta |G| \delta_{\alpha\beta} = k_\alpha |G|$$

$$\boxed{k_\alpha = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi^*_\alpha(g) \chi_\beta(g) \ldots}$$

или

$$k_\alpha = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma_k} p_k \chi^*_\alpha(\sigma_k) \chi(\sigma_k)$$

$$\langle \ldots \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \ldots \text{ – среднее по группе}$$

$$k_\alpha = \langle \chi_\alpha | \chi \rangle_G \quad || \quad \langle \chi_\alpha | \chi_\beta \rangle_G = \delta_{\alpha\beta}$$

Кратность вырождения есть размерность НП

НП группы Δ

* характеры неприводим. предст. = = неприводимые характеры = характ

$б_1=\{1\}$ $б_2=\{z,z^2\}$ $б_3=\{p,pz,pz^2\}$

	$б_1$	$б_2$	$б_3$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	−1
χ_3	2	−1	0

Ортогональность:

$$1\cdot 1+1\cdot 2-1\cdot 3=0$$
$$1\cdot 2-1\cdot 2+1\cdot 0\cdot 3=0$$
$$1\cdot 2-1\cdot 2=0$$
$$1^2+2\cdot 1^2+3\cdot 1^2=6$$

$D(g)$ – представление

$\dim D(g)=3$

$$1\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$z\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$p\to\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\boxed{3\,|\,0\,|\,1}$ $\chi(g)$

Процедура разложения по НП

$$k_1=\frac{1}{6}(3+0+3)=1$$
$$k_2=\frac{1}{6}(3+0-3)=0$$
$$k_3=\frac{1}{6}(3\cdot 2)=1$$

Ответ:

$$D(g)=D_1(g)\oplus D_3(g)$$

$$\begin{pmatrix}1\times 1&0\;0\\0&\\0&2\times 2\end{pmatrix}$$

Снятие вырождения

$\hat H\Psi=E\Psi$ ур. Шредингера

$[\hat D(g)_\alpha,\hat H]=0$,

n_α – кратность вырождения

$\hat H=\hat H_0+V$

G – гр. симметрии

Кратность вырождения есть размерность НП!

Колебания молекул

CH_4 Метан

$G = T_d$

$G < P_n \otimes O(3,\mathbb{R})$

1. Вырождение колебаний

$$E = \sum_i^{3n} \frac{M_i \dot{x}_i^2}{2} + \sum_{i,j} \frac{V_{ij} x_i x_j}{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{x=0} = 0, \quad x = (x_1 \ldots x_{3n})$$

$$V_{ij} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x=0}$$

$$\Rightarrow M_i \ddot{x}_i = -\sum_k V_{ik} x_k$$

Нормальные колебания

$x_i = a_i e^{i\omega t}$

$$M_i \omega^2 a_i = \sum V_{ik} a_k$$

$$\sqrt{M_i}\, a_i = b_i, \quad \omega^2 b_i = \sum_k \underbrace{\frac{V_{ik} b_k}{\sqrt{M_i M_k}}}_{B_{ik}}$$

Получилась задача на с.з. для B_{ik}

$$\det(B_{ik} - \omega^2 \delta_{ik}) = 0$$

Вырождение — несколько с.в., отвечающих одному с.зн.

Подпр-во размерности n_α

Кратность вырождения — размерность НП

$$n_\alpha = \dim D^{(\alpha)}(g)$$

Исходное представление

$\dim D(g) = 3n$

Характер НП:

$\chi(1) = 3n$

$z(\theta)$ — поворот

$$z \to \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_+(z)$$

$$\chi(z) = N_A(2\cos\theta + 1)$$

N_A — число атомов на оси

$$A_+(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\chi(\sigma) = N_p$

N_p — число атомов в пл-ти

$$A_+(S) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

з. поворот

$$\chi(s) = N_S(2\cos\theta - 1)$$

N_S — число атомов на пересеч. оси и зеркальной пл-ти

$N_S \in \{0,1\}$

Колебательное представление

$D_0(g) \quad \omega^2 \neq 0$

осцилляторн.

$\chi_0(1) = 3n - 6$

псевдовектор $I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A_-(z) = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_-(\sigma) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_\theta(z) = (N_A - 2)(2\cos\theta + 1)$$

$$\chi_\theta(\sigma) = N_p$$

$$\chi_\theta(s) = N_S(2\cos\theta - 1)$$

Проектор на подпр-во НП

$$P_\alpha = \frac{n_\alpha}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\alpha^*(g) D(g)$$

Th Вигнера

Если представление просто приводимо, можно найти все с.в. из симметрии

Задачи

O_3 озон

$G = D_3$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ ← структура

$$D(1) = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{smallmatrix}1&0\\0&1&\\&&1\end{smallmatrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix}1&0\\0&1&\\&&1\end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{smallmatrix}1&0\\0&1&\\&&1\end{smallmatrix} \end{array}\right)$$

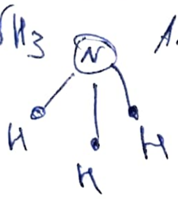
$$D(2) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \\ \hline R & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(p) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & P & 0 \\ \hline P & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & P \end{array}\right)$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

NH_3 Аммиак



$G = C_{3v} \simeq D_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$|12|0|2|$ ип

$k_1 = \frac{1}{6}(12+6) = 3$

$k_2 = \frac{1}{6}(12-6) = 1$

$k_3 = \frac{1}{6}(24) = 4$

$D(g) = 3D_1 \oplus D_2 \oplus 4D_3$

! 3 – однокр.
1 – однокр
4 – двукратн.
вырожд.

В осцилят. пр-е

$|6|0|2|$ кП

$k_1 = \frac{1}{6}(6+6) = 2$

$k_2 = \frac{1}{6}(6-6) = 0$

$k_3 = \frac{1}{6}(12) = 2$

$D_0(g) = 2D_1 \oplus 2D_3$

! 2 - однократных вырожд.
2 – двукратн. вырожд.

O_3: $|3|0|1|$ кП

$k_1 = \frac{1}{6}(3+3) = 1$

$k_2 = \frac{1}{6}(3-3) = 0$

$k_3 = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1$

$D_0(g) = D_1 \oplus D_3$

Представление н-ся простоправодимым, если $k_\alpha \in \{0, 1\}$

ЛИ.

Группа Ли — группа, которая является гладкая многообразием

Пусть $g(0)=1$
$g(x)g(y)=g(z)$
$z=\varphi(x,y)$
φ — гладкая ф-я

Свойства:

1. $\varphi(\varphi(x,y),z)=\varphi(x,\varphi(y,z))$ ассоц
2. $\varphi(x,0)=\varphi(0,x)=x$ единица
3. $\forall x, \exists y: \varphi(x,y)=\varphi(y,x)=0$ обр.

Матричные гр. Ли

$G < GL(n,\mathbb{R})$ или $G(n,\mathbb{C})$

$\dim GL(n,\mathbb{R})=n^2$

$\dim GL(n,\mathbb{C})=2n^2$

Алгебра Ли
— линейное пр-во с бинарной операцией [ ] (скобка Ли)

1. $[a, b+\lambda c]=[a,b]+\lambda[a,c]$ линейность
2. $[b,a]=-[a,b]$ антисимм.
3. $[a,[b,c]]+[c,[a,b]]+[b,[c,a]]=0$

Алгебра Ли группы Ли

$I=\left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_{x=0}, g=1\ldots n$

Коммутатор генераторов выражается через генераторы

$g I_i g^{-1}=\tilde{I}_i=(1+t\sum c_k I_k)\, I\,(1-t\sum_k c_k I_k)$

g — в окр-ти 1 $\quad t\to 0$

$[I_i, I_k]$
$\parallel$

$= I_i + t\sum_k c_k (I_k I_i - I_i I_k) + O(t^2)$

$= I_i + t\sum d_e I_e$

Экспоненциальная ф-ла

$n=1 \quad g(s+t)=g(s)g(t)$ групповое св-во

$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Rightarrow g'(t)=I g(t)$

$\Rightarrow \begin{cases} g(t)=\exp(It) \\ g(0)=1 \end{cases}$ эксп. ф-ла

По алгебре Ли можно восстановить единственную связную или односвязную гр. Ли

Задача 4

$SO(3,\mathbb{R})$ - группа вращений

$\dim SO(3) = 3$

параметризация

$$g(\alpha_1, \alpha_2 \alpha_3) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & 0 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & 0 & \sin\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}$$

Группы ортогональных и унитарных матриц

$O(n,\mathbb{R})$ – ортогон.

$SO(n,\mathbb{R})$ – спец. ортог.

$U(n,\mathbb{C})$ – унитарные

$SU(n,\mathbb{C})$ – унимодулярн.

A – алгебра ... Ли

1. $\dim U(n,\mathbb{C}) = n^2$

$\dim SU(n,\mathbb{C}) = n^2 - 1$

[$A\,U(n,\mathbb{C})$ состоит из всех антиэрмит. матриц ($A^+ = -A$)

$g(t) = \exp(At)$

$g^+(t) = \exp(A^+ t) = \exp(-At) = g^{-1}(t)$

$\dim AU(n,\mathbb{C}) = n + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2 = n^2$

$$U \sim \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix}$$

$\det e^{At} = e^{\mathrm{tr} A} = 1 \Rightarrow \mathrm{tr} A = 0$

$\dim ASU(n,\mathbb{C}) = n^2 - 1$

[$ASU(n,\mathbb{C})$ – состоит из бесследовых антиэрмитовых матриц

2. $\dim O(n,\mathbb{R}) = \dim SO(n,\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$

$$g = \begin{pmatrix} \underbrace{1 \;\ddots\; 1}_{n_+} & & & \\ & \underbrace{-1 \;\ddots\; -1}_{n_-} & & 0 \\ & & \begin{matrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{matrix} & \\ 0 & & & \ddots \;\begin{matrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{matrix} \end{pmatrix}$$

n_- – четное $\Rightarrow g$ – поворот

n_- – нечетное $\Rightarrow g$ – несобств. вращение или (зерк. поворот)

[$ASO(n,\mathbb{R})$ – состоит из всех антисимм. матриц ($A^T = -A$)

$g(t) = \exp(At)$, $g^{-1}(t) = \exp(-At) =$

$= \exp(A^T t) = [\exp(At)]^T = g^T$

$\dim ASO(n,\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$

Алгебры $ASU(2)$ и $ASO(3)$

$g \in SU(2)$ параметризация

$\dim SU(2) = 3$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$

$\det g = 1$

$a = x_4 + i x_3$

$b = x_2 + i x_1$

$\det g = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 =$

ур-е сферы

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$x_4 = \sqrt{1 - x^2}$

генераторы

$I_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{\vec{x}=0}$

$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1$

$I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2$

$I_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3$

$\boxed{\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i e_{ijk}\sigma_k}$

$[\sigma_i \sigma_j] = 2 i e_{ijk}\sigma_k$

$[I_i I_j] = i^2 \cdot 2i e_{ijk}\sigma_k = -2 e_{ijk} I_k$

$ASU(2)$ – построена

$g(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \in SO(3)$

$g(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = g(\alpha_1 0 0)\cdot g(0 \alpha_2 0)\, g(0 0 \alpha_3)$

$$I_1 = \frac{\partial g}{\partial \alpha_1}\Big|_{\alpha_1 = 0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S\alpha_1 & -C\alpha_1 \\ 0 & C\alpha_1 & -S\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$[I_1 I_2] = I_1 I_2 - I_2 I_1 = I_3$

$\boxed{I_i I_j = e_{ijk} I_k}$

$ASU(2)$: $I_j = \lambda L_j$

$[I_i I_j] = \lambda^2 [L_i L_j] = -2 e_{ijk} \lambda L_k$

$\Rightarrow e_{ijk} L_k \Rightarrow \boxed{\lambda = -2}$

$\boxed{ASU(2) \simeq ASO(3)}$

Задачи

Гомоморфизм $SU(2) \to SO(3)$

Эрм. матрица $H = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}$

$U^{-1} = U^{+}$ $\qquad H' = UHU^{+}$

унитарн. пр-е сохр. эрмит.

$H'^{+} = (UHU^{+})^{+} = UH^{+}U^{+} = H'$

$\det H = -x^2 - y^2 - z^2$

$$H' = \begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix}$$

$\det H' = -x'^2 - y'^2 - z'^2$

$SU(2) \ni U \Rightarrow R \in SO(3): \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$H'' = VH'V^{+} = V(UHU^{+})V^{+} =$

$= (VU)H(VU)^{+} \Rightarrow$ получился гомоморфизм

Трудность: $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

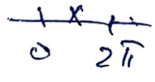
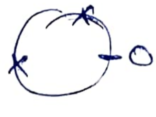
$\to R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

т.е. $\{U, V\} = C_2 \triangleleft SU(2)$

$SU(2)/C_2 \simeq SO(3)$ $\Big\}$ фактор группа

Примеры накрытия

– отображение, в котором каждой точке образа отвечают дискретные прообразы

$\mathbb{R}$  $\Rightarrow S^1$ 

бесконечнолистное накрытие

Неприводимые представления группы вращения

Алгебра угловых моментов

$ASO(3)$ $[I_i I_j] = e_{ijk} I_k$

$ASU(2)$ $[L_i L_j] = -2e_{ijk} L_k$

$\uparrow$ $\vec{L} = i\vec{\sigma}$ $\vec{L} = -2\vec{J}$

изоморфизм

$$O(\varphi) = \exp(\varphi I_2) = \exp\left[\varphi \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0 \end{pmatrix} + \frac{\varphi^2}{2} \begin{pmatrix} -1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1 \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$U(\varphi) = \exp(\varphi \tfrac{L_2}{2}) = \exp(i\varphi \tfrac{\sigma_2}{2}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\varphi/2 \\ \sin\varphi/2 & \cos\varphi/2 \end{pmatrix}$$

Гомоморфизм $SU(2) \to SO(3)$

$\vec{I} = \lambda \vec{J}$

(1): $\lambda^2 [J_i J_j] = \lambda e_{ijk} J_k$

$\lambda = -i$: $[J_i J_j] = i e_{ijk} J_k$

— Алгебра угловых моментов

$\vec{J}^+ = \vec{J}$

Оператор Казимира —

— квадратичная комбинация генераторов, которая коммутирует со всеми генераторами

$k = J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$

$[k, J_3] = J_1[J_1 J_3] + [J_1 J_3] J_1 +$

$+ J_2[J_2 J_3] + [J_2 J_3] J_2 = 0$

Повышающий и понижающий

$[J_3 J_+] = J_+ = J_1 + iJ_2$

$[J_3 J_-] = -J_- = J_1 - iJ_2$

Базис НП

$k|\lambda m\rangle = \lambda|\lambda m\rangle$ $J_3|\lambda m\rangle = m|\lambda m\rangle$

$J_3|J_+|\lambda m\rangle = (J_+ J_3 + J_+)|\lambda m\rangle =$

$= (m+1) J_+ |\lambda m\rangle \Rightarrow J_+|\lambda m\rangle = b_m|\lambda m+1\rangle$

$J_3|J_-\lambda m\rangle = (J_- J_3 - J_-)|\lambda m\rangle =$

$= (m-1) J_- |\lambda m\rangle \Rightarrow J_-|\lambda m\rangle = a_m|\lambda m-1\rangle$

...

— $|\lambda\, m+1\rangle$

— $|\lambda\, m\rangle$

— $|\lambda\, m-1\rangle$

...

лестница

НП состоит из $2j+1$ ф-ий

$2j+1 \to$ целое

$j \to$ целое v полуцелое состояний

$J_+ J_- = J_1^2 + J_2^2 + i[J_2 J_1] =$

$= J^2 - J_3^2 + i(-i) J_3 = J^2 - J_3^2 + J_3$

$J_- J_+ = J^2 - J_3^2 - J_3$

Верхняя ступень $|\lambda m_{max}\rangle$

$J_-|J_+|\lambda m_{max}\rangle = 0$ $m_{max} = j$

$(J^2 - J_3^2 - J_3)|\lambda j\rangle = 0$

$[\lambda - j(j+1)]|\lambda j\rangle = 0$

$\boxed{\lambda = j(j+1)}$ $|\lambda m\rangle \to |jm\rangle$

— Нижняя ступень $|\lambda m_{min}\rangle$

$J_+|J_-|\lambda m_{min}\rangle = 0$

$(j - m_{min}^2 - m_{min})|\lambda m_{min}\rangle = 0$

$m_{min}^2 - m_{min} - j(j+1) = 0$

$\boxed{M_{min} = -j}$

Задачи

j – целое или полуцелое

Все НП $SO(3)$ имеют нечетную размерность

Все НП $SU(2)$ могут быть четной или нечетной размерности

Базис НП

Представление на ф-х

$$gf(\vec{r}) = f(g^{-1}\vec{r})$$

$$g(\alpha,0,0) f(x,y,z) = f(x, y\cos\alpha_1 + z\sin\alpha_1, -y\sin\alpha_1 + z\cos\alpha_1)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha_1} f(x,y,z) = (-y\sin\alpha_1 + z\cos\alpha_1)\frac{\partial f}{\partial y} + (-y\cos\alpha_1 + z\sin\alpha_1)\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\alpha_1 = 0: \quad I_1 f = z\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$I_1 = y\partial_z + z\partial_y$$

! Сложная выкладка

$$-k = (-\vec{r}\times\nabla) = e_{ijk} x_i \nabla_j e_{kem} x_e \nabla_m$$

$$= x_i\nabla_j x_e \nabla_m (\delta_{ie}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{je}) =$$

$$= x_i \nabla_j x_i \nabla_j - x_i (\nabla_j x_j)\nabla_i =$$

$$= x_i x_i \nabla_j \nabla_j + x_i \delta_{ij}\nabla_j - x_i x_j \nabla_i \nabla_j - 3x_i\nabla_i$$

Сфер. коорд. $\quad r\nabla = r\partial_r$

$$= r^2\Delta + r\partial_r - x_i x_j \nabla_i\nabla_j - 3r\frac{\partial}{\partial r}$$

$= \Delta_\Omega$ – угловой оператор Лапласа

С.ф. $\quad \Delta_\Omega \Psi = \lambda\Psi$

сферические гармоники

$$\Psi = Y_{em}(\theta,\varphi) = C_{em} e^{im\varphi} P_\ell^{|m|}(\cos\theta)$$

$$\lambda = -l(l+1)$$

$$J_3 Y_{em} = m Y_{em} \quad (= |\ell m\rangle)$$

$Y_{em}(\theta,\varphi)$ образуют базис НП $ASO(3)$, а значит и группы $SO(3)$

$j = 0 \quad 2j+1 = 1 \quad g \to 1$

единичное (скалярное) представл.

$j = 1/2 \quad 2j+1 = 2 = \dim D$

НП $SO(2)$, но не являет. НП $SO(3)$

Фунд. представление – точное представление наименьшей размерности

Тензоры

Прямое произведение матриц

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} B & \dots & a_{1n} B \\ \vdots & & \\ a_{n1} B & \dots & a_{nn} B \end{pmatrix}$$

$N\times N$ $M\times M$

$NM \times NM$

Свойства:

1. $(A+\lambda B)\otimes C = A\otimes C + \lambda B \otimes C$
2. $(A\otimes B)\otimes C = A\otimes (B\otimes C)$
3. $(A\oplus B)\otimes C = A\otimes C + B\otimes C$
4. $(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2) = A_1 A_2 \otimes B_1 B_2$
5. $\operatorname{tr} A\otimes B = \operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B$

Прямое произведение представлений

Пусть $T(g)$ и $D(g)$ – представл. гр. G, $\dim D(g) = N$, $\dim T(g) = M$

$$D(g)|i\rangle = \sum_{j=1}^{N} |j\rangle\langle j| D(g)|i\rangle = \sum_j |j\rangle D_{ji}$$

$$T(g)|m\rangle = \sum_l |l\rangle T_{lm}$$

Прямое произв. базисов

$|i\rangle \otimes |m\rangle$

$$(D(g)\otimes T(g))(|i\rangle\otimes|m\rangle) = \sum_{j,l}(|j\rangle\otimes|l\rangle) D_{jl} T_{lm}$$

ПП представлений свелось к ПП matrix

$D\otimes T$ – представление? YES

$D(g_1)D(g_2) = D(g_1 g_2)$

$T(g_1)T(g_2) = T(g_1 g_2)$

т.к. T и D – пр-е

$$[D(g_1)\otimes T(g_1)][D(g_2)\otimes T(g_2)] = D(g_1) D(g_2) \otimes T(g_1) T(g_2) = D(g_1 g_2)\otimes T(g_1 g_2)$$

Разложение Клебша-Гордана

$D^{(\alpha)}, D^{(\beta)}$ – НП гр. G

$$D^{(\alpha)}(g)\otimes D^{(\beta)}(g) = \bigoplus_\gamma k_\gamma D^{(\gamma)}(g)$$

$k_\gamma \in N$

Тензорное представление

Тензор $T_{i_1\dots i_2}$ ранга 2 – это таблица чисел, которая под действием $g\in G$ преобразуется как ПП 2 векторных представлений

Симметризаторы Юнга

$2=2$: $S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij}+T_{ji})$ – симм. часть

$A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij}-T_{ji})$ – антисимм.

$S_{ij} = S_{ji}$: $S_{12}=S_{21}$, $S_{13}=S_{31}$, $S_{23}=S_{32}$

$A_{ij} = -A_{ji}$: $A_{11}=A_{22}=A_{33}=0$

$A_{12}=-A_{21}$, $A_{13}=-A_{31}$, $A_{32}=-A_{23}$

Действие подстановки на тензор

$$\sigma T_{j_1\dots j_2} = T_{j_{i_1}\dots j_{i_2}}$$

Действие в комм. группой с $g\in G$ часть с определенной симметр. инвариантн. подпр-во в пр-ве тензоров

Симметризатор – проектор на н/н. НП

$$\hat{S} = \frac{1}{2!}\sum_{\sigma\in P_2}\sigma$$

Антисимм.

$$\hat{A} = \frac{1}{2!}\sum_{\sigma\in P_2}\det\sigma\cdot\sigma$$

$$\det\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma - \text{чет} \\ -1, & \sigma - \text{нечет}\end{cases}$$

Задачи

Разложение Клебша-Гордана для $g = SO(3)$ $2l+1$ размерн.

$$D^{(l)}(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{il\varphi} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-il\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\chi_l(\varphi) = \sum_{m=-l} e^{im\varphi} = e^{-il\varphi} \frac{1-e^{i(2l+1)\varphi}}{1-e^{i\varphi}}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-il\varphi}}\,\cancel{e^{i(l+\frac{1}{2})\varphi}}\, \sin}{\cancel{e^{i\varphi/2}}\, \sin}$$

$$\chi_l(\varphi) = \frac{\sin(l+\frac{1}{2})\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

Ортогон.: $\langle \chi_{l_1} | \chi_{l_2} \rangle_g = \delta_{l_1 l_2} =$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(l_1+\frac{1}{2})\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} \cdot \frac{\sin(l_2+\frac{1}{2})\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\, g(\varphi)\, d\varphi$$

$$g(\varphi) = A \sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$= A \int \tfrac{1}{2}[\cos(l_1-l_2)\varphi - \cos(l_1+l_2+1)\varphi$$

$$= 2\pi \frac{A}{2} \delta_{l_1 l_2} \Rightarrow A = \frac{1}{\pi}$$

т2(*): $\chi_\alpha \chi_\beta = \sum k_\gamma \chi_\gamma$

$$k_\gamma = \langle \chi_{\gamma_j} | \chi_\alpha \chi_\beta \rangle_g =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(l_1-l_2)\varphi - \cos(l_1+l_2+1)\varphi] (e^{ij\varphi} + \ldots + 1 + \ldots + e^{-ij\varphi}) d\varphi$$

$l_1 > l_2$

$$= \begin{cases} 0, & j < l_1 - l_2 \\ 1, & l_1 - l_2 \le j \le l_1 + l_2 \\ 1 - 1 = 0, & l_1 + l_2 < j \end{cases}$$

$$k_j = \begin{cases} 1, & \text{если } |l_1 - l_2| \le j \le |l_1 + l_2| \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Разложение КГ для $SO(3)$

$$D^{(l_1)} \otimes D^{(l_2)} = \bigoplus_{j=|l_1-l_2|}^{|l_1+l_2|} D^{(j)}$$

Правила Отбора

Симметризация базиса

$D^{(1)}|i\rangle = \sum_j |j\rangle D_{ji}$?=?. $D^{(1)} \otimes D^{(1)}$ $G = D_3$

$D^{(1)}|m\rangle = \sum_l |l\rangle D_{lm}$

$(D^{(1)} \otimes D^{(1)})(|i\rangle \otimes |m\rangle) = \sum_{jl} |j\rangle \otimes |l\rangle D_{ji} D_{lm}$

$\Psi_S = \frac{1}{2}[|i\rangle \otimes |m\rangle + |m\rangle \otimes |i\rangle]$

$(D^{(1)} \otimes D^{(1)}) \Psi_S = \frac{1}{2} \sum_{jl} |j\rangle \otimes |l\rangle \cdot$

$[D_{ji} D_{lm} + D_{jm} D_{li}]$

$\chi_S(g) \underset{\substack{j=i \\ l=m}}{=} \frac{1}{2}[D_{ii} D_{ll} + D_{il} D_{li}]$

$\chi_S = \frac{1}{2}[\chi^2(g) + \chi(g^2)]$

Аналогично

$\chi_A = \frac{1}{2}[\chi^2(g) - \chi(g^2)]$

Инвариантные тензоры
- если он не меняется под действием пр-я группы

Правила Отбора

$V_{mn} = \langle m|\hat{V}|n\rangle$

$D = D_m \otimes D_v \otimes D_n$

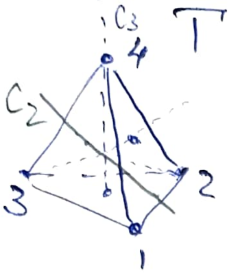
Переход запрещен
если $k_0 = 0$

k_0 — количество независимых компонент инв. тензора

Задачи

Задачи

№1. Определить порядок и число КСЭ в группе T (вращ.) Найти инв. подгруп. H и фактор-группу T/H. Построить таблицу неприв. характ.



Вершину 4 на месте оставляют при преобразования

$H = \{e, z, z^2\}$, $|H| = 3$

z — поворот на 120° ось C_3

индекс подгруппы H = = число вершин тетраэдра

$\Rightarrow |T| = 4 \cdot 3 = 12$

обозначим вращения вокруг оси C_3 на 120° — z_i, где $i = 1, 2, 3, 4$

т.е. номера вершин

$H_i = \{e, z_i, z_i^2\}$, $i = 1, 2, 3, 4$

обозначим опрокидывание вокруг оси C_2 на 180° — p_j, $j = 1, 2, 3$

$P_j = \{e, p_j\}$, $j = 1, 2, 3$

$\Rightarrow T = \{e, z_1, z_2, z_3, z_4,$
$z_1^2, z_2^2, z_3^2, z_4^2,$
$p_1, p_2, p_3\}$

Сопряженные элементы

$a \sim b \Leftrightarrow \exists g \in G \mid a = gbg^{-1}$

В тех же группах — повороты вокруг разных осей на один и тот же угол сопряжены $\Leftrightarrow$ в группе $\exists$ преобразование переводящее одну ось в другую.

из лекций

4 КСЭ: e

z_1, z_2, z_3, z_4

$z_1^2, z_2^2, z_3^2, z_4^2$

p_1, p_2, p_3

Инвариантная подгруппа

$\forall g \in G: H = gHg^{-1}$ $\quad H \triangleleft G$

т.е. ПСК совпадают с ЛСК

следствие из Т. Лагранжа:

$|G:H| = \frac{|G|}{|H|} \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow H = \{e, p_1, p_2, p_3\}$

т.к. $\frac{|T|}{|H|} = 3$, $H \triangleleft T$

Фактор группа (мн-во ПСК): $T/H = F$, $|F| = 3$

$E = He = \{e, p_1, p_2, p_3\}$

$R = Hz_1 = \{z_1, p_1 z_1, p_2 z_1, p_3 z_1\}$

$R^2 = Hz_1^2 = \{z_1^2, p_1 z_1^2, p_2 z_1^2, p_3 z_1^2\}$

$\Rightarrow F = \{E, R, R^2\} = C_3$

Представление — изоморфизм $g \to D(g)$

$g_1, g_2 \in G \Rightarrow D(g_1 g_2) = D(g_1) \cdot D(g_2)$

Приводимость:

$D(g) \sim D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)} & 0 \\ 0 & D^{(2)} \end{pmatrix}$

• Группа T имеет 4 КСЭ

$\Rightarrow \exists$ 4 НП (по свойству НП)

•

$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = |T|$ (по св-ву)

$n_\alpha = \dim D^{(\alpha)}(g)$, $\alpha = 1,2,3,4$

$\Rightarrow 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 = 12$

одномерные — трехмерн.

T	$\{e\}$	$\{z_i\}$	$\{z_i^2\}$	$\{p_j\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	$e^{\frac{4\pi i}{3}}$	1
$\chi^{(3)}$	1	$e^{-\frac{2\pi i}{3}}$	$e^{-\frac{4\pi i}{3}}$	1
$\chi^{(4)}$	3	0	0	-1
χ	(4)	(1)	(1)	(0)

$i = \{1,2,3,4\}$, $j = \{1,2,3\}$

$\Downarrow$

! Первый столбец всегда размерности

! строки таблицы $\perp$ с весом p_L

! столбцы таблицы $\perp$ с весом 1

Построим одномерное представл.

$z_i^3 = e \Rightarrow z_i = e^{\frac{2\pi i}{3}n} = \alpha$, $n = \pm 1, 0$

$z_i^2 = e^{\frac{4\pi i}{3}n} = \alpha^2$

$p_j^2 = e \Rightarrow p_j = \pm 1 = \beta$

Ортогональность строк

$\underbrace{1}_{\text{вес}} \cdot \underbrace{1}_{\chi^{(1)}} \cdot \underbrace{1}_{\chi^{(\beta)}} + 4 \cdot 1 \cdot \alpha + 4 \cdot 1 \cdot \alpha^2 + 3 \cdot 1 \cdot \beta = 0$

$4(1 + \alpha + \alpha^2) + 3(\beta - 1) = 0$

$\beta = 1 \quad \alpha = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{\pm 2\pi i}{3}}$

Построим трехмерное пр-е

$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \cos 120 & & 0 \\ & \cos 120 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{tr} E = 3 \quad \operatorname{tr} R = 0$

$\operatorname{tr} R^2 = 0$

$a_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{(i)*}(g) \chi(g)$

$a_1 = \frac{1}{12}(4 + 4 + 4) = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 0$

$a_4 = \frac{1}{12}(12) = 1$

$D(g) = 1 D^{(1)}(g) \oplus 1 \cdot D^{(4)}(g)$

$\Rightarrow$ Первая строка всегда единицы!

$\Rightarrow$ НП фактор-группы являются НП самой группы

$\Rightarrow \sum_L [\chi^{(\alpha)}(k_L)]^* \cdot \chi^{(\beta)}(k_L) p_L = |G| \delta_{\alpha\beta}$

k_L — класс эквивал.

p_L — $|k_L|$ (число элем-в)

$\Rightarrow \sum_{g \in G} [\chi^{(\alpha)}(g)]^* \chi^{(\beta)}(g) = |G| \delta_{\alpha\beta}$

№2 Спин: $|\uparrow\rangle$ $|\downarrow\rangle$ – ортогональн. система из трех электр.
$\Rightarrow$ 8 волн. функций
Группа P_3. Найти НП

Найдем волновые функции

1. $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$
2. $|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle$
3. $|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$
4. $|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle$
5. $|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle$
6. $|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle$
7. $|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle$
8. $|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$

Группа $P_3 \simeq D_3$

$e \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$p \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$z \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Составим ИП:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \chi(e) = 8$$

$$z = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & \dots & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & \dots & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \chi(z) = 2$$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & \dots & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & \dots & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \chi(p) = 4$$

	$\{e\}$	$\{z, z^2\}$	$\{p, pz, pz^2\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	-1
$\chi^{(3)}$	2	-1	0
χ	8	2	4

$$a_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{(i)*}(g)\chi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_k p_k \chi^{(i)*}(G_k)\chi(G_k)$$

$$a_1 = \frac{1}{6}(8 + 4 + 12) = 4$$

$$a_2 = \frac{1}{6}(8 + 4 - 12) = 0$$

$$a_3 = \frac{1}{6}(16 + (-4) + 0) = 2$$

$$D(g) = 4D^{(1)}(g) + 2D^{(3)}(g)$$

№3 Построить таблицу неприводимых характеров T (пол.) Найти кратности вырождения нормальных колебаний

Построим полную группу T

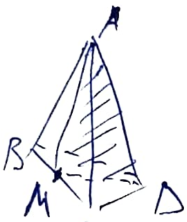
В неё войдут: группа $T_{ед}$ из №1., в которой 12 элем.

$|T_{ед}| = 12$, $T_{ед} = \{e, z_i, z_i^2, p_j\}$

$i = \{1, 2, 3, 4\}$, $p_j = \{1, 2, 3\}$

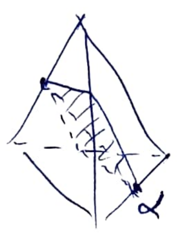
Р-м $\Delta ABCD$:

При двойном отражении



$ABCD \xrightarrow[\text{отраж.}]{2x} ABCD$

Также 6 плоскостей типа α



$ABCD \xrightarrow[\text{поворот}]{\text{отражение}} ABCD$

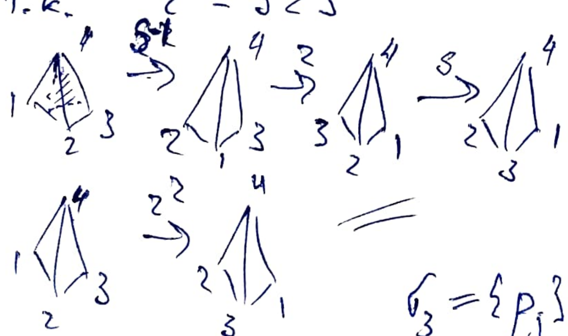
$\Rightarrow |T| = 12 + 6 + 6 = 24$

Построим КС:

$\sigma_1 = \{e\}$

$\sigma_2 = \{z_i, z_i^2\}$, $i = \{1, 2, 3, 4\}$

т.к. $z^2 = S z S^{-1}$



$\sigma_3 = \{p_j\}$

$\sigma_4 = \{S_i\}$, $i = \{1, \dots 6\}$

$\sigma_5 = \{p_j S_i\}$

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2 + h_5^2 = 24$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 24$$

Составим таблицу характеров:

	(1) σ_1	(8) σ_2 ***	(3) σ_3 ****	(6) σ_4	(6) σ_5
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
* $\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1
**: $\chi^{(3)}$	2	-1	2	0	0
$\chi^{(4)}$	3	0	-1	1	-1
$\chi^{(5)}$	3	0	-1	-1	1

*: $1 + 8 + 3 + 6a_{24} + 6a_{25} = 0$

$a_{24} + a_{25} = -2 \Rightarrow a = -1$ (условие из №1)

**: $\begin{cases} 2 + 8a_{32} + 3a_{33} + 6(a_{34} + a_{35}) = 0 \\ 2 + 8a_{32} + 3a_{33} - 6(a_{34} + a_{35}) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow a_{34} = a_{35} = 0$

$a_{32} = -1$ т.к. поворот. $a_{32} = \pm 1, 0, e^{\dots}$

***: $1 + 1 - 2 + 3(a_{42} + a_{52}) = 0$

$a_{42} = a_{52} = 0$

****: $1 + 1 + 4 + 3(a_{43} + a_{53}) = 0$

$a_{43} = a_{53} = -1$

Поместим 4 грузика в вершины.

Всего 12 степеней свободы

4 грузика × 3 коорд.
⊕ нет движения как целого и вращения

Нет в центре груза

Найдем характеры:

$\chi(\sigma_1) = 12$

$\chi(\sigma_2) = 1 \cdot (2\cos\frac{2\pi}{3} + 1) = 0$
→ число атомов типа AO

$\chi(\sigma_3) = 0 \cdot (2\cos\pi + 1) = 0$
→ типа MN

$\chi(\sigma_4) = 2$
→ в пл-ти AO

$\chi(\sigma_5) = 0 \cdot (2\cos\frac{\pi}{2} - 1) = 0$
→ типа MN

	12	0	0	2	0

χ

Соответственно:

$k_1 = \frac{1}{24}(12 + 6 - 2) = 1$

$k_2 = \frac{1}{24}(12 \cdot 1 - 6 \cdot 2) = 0$

$k_3 = \frac{1}{24}(12 \cdot 2 - 6 \cdot 0) = 1$

$k_4 = \frac{1}{24}(12 \cdot 3 + 6 \cdot 2) = 2$

$k_5 = \frac{1}{24}(12 \cdot 3 - 6 \cdot 2) = 1$

т.е.

$D_0(g) = D^{(1)} \oplus D^{(3)} \oplus 2D^{(4)} \oplus D^{(5)}$

Ответ:

одна частота невырожденна.
одна двухкратновырожд.
три трехкратновырожд

ω_1, $\omega_2 = \omega_3$,
$\omega_4 = \omega_5 = \omega_6$,
$\omega_7 = \omega_8 = \omega_9$,
$\omega_{10} = \omega_{11} = \omega_{12}$.

Можно не решать секулярное уравнение, а воспользоваться симметрией задачи.

Задачи

№4 • Построить представление группы вращений в пр-ве однородных полиномов третьей степени

$$P(x,y,z)=\sum_{m+n+l=3} C_{mnl}\, x^m y^n z^l$$

• Найти базис подпр-ва гармон. полиномов.

• Разложить ИП на НП.

• выразить базис через Y_{lm}

Установим изоморфизм с симметричными тензорами третьего ранга в 3D пр-ве

$$S_{ijk}\, x_i x_j x_k = \sum_{m+n+l=3} c_{mnl}\, x^m y^n z^l$$

№	m	n	l	
1	3	0	0	x^3
2	0	3	0	y^3
3	0	0	3	z^3
4	2	1	0	x^2y
5	2	0	1	x^2z
6	1	0	2	xz^2
7	1	2	0	xy^2
8	0	2	1	y^2z
9	0	1	2	yz^2
10	1	1	1	xyz

$$\boxed{D = D^{(3)} \oplus D^{(1)}}$$

a_3 №5

изоморфизм: комп. тензора t $\to$ констант c

1. $t_{111} = c_{300}$
2. $t_{222} = c_{030}$
3. $t_{333} = c_{003}$
4. $t_{112} = t_{121} = \frac{c_{210}}{3} = t_{211}$
5. $t_{113} = t_{131} = t_{311} = \frac{c_{201}}{3}$
6. $t_{133} = t_{313} = t_{331} = \frac{c_{102}}{3}$
7. $t_{122} = t_{212} = t_{221} = \frac{c_{120}}{3}$
8. $t_{223} = t_{232} = t_{322} = \frac{c_{021}}{3}$
9. $t_{233} = t_{323} = t_{332} = \frac{c_{012}}{3}$
10. $t_{123} = t_{132} = t_{321} = t_{312} = t_{213} = t_{231} = \frac{c_{111}}{6}$

$c_{mnl} \to a_i$ для удобства

$$P(x,y,z) = a_1x^3 + a_2y^3 + a_3z^3 + \ldots + a_9 yz^2 + a_{10} xyz$$

$$\Delta P = 0$$

$$\Delta P = (6a_1 + 2a_7 + 2a_6)x + (2a_4 + 6a_2 + 2a_9)y + (2a_5 + 2a_8 + 6a_3)z = 0$$

Т.к. координаты x, y, z независимы, то

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a_1 + a_7 + a_6 = 0 \\ 3a_2 + a_4 + a_9 = 0 \\ 3a_3 + a_5 + a_8 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 = -\frac{a_6 + a_7}{3}, \quad a_2 = -\frac{a_4 + a_9}{3}, \quad a_3 = -\frac{a_5 + a_8}{3}$$

Три уравнения связи $\Rightarrow$ $\dim = 10 - 3 = 7$

$\Rightarrow$ БАЗИС

1. $x^2y - \frac{1}{3}y^3$
2. $x^2z - \frac{1}{3}z^3$
3. $xz^2 - \frac{1}{3}x^3$
4. $xy^2 - \frac{1}{3}x^3$
5. $y^2z - \frac{1}{3}z^3$
6. $yz^2 - \frac{1}{3}y^3$
7. xyz.

Вспомним сф. функции:

$$Y_{3\pm3} = \mp\frac{1}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}}\frac{(x\pm iy)^3}{z^3}$$

$$Y_{3\pm2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}}\frac{(x\pm iy)^2 z}{z^3}$$

$$Y_{3\pm1} = \mp\frac{1}{8}\sqrt{\frac{21}{\pi}}\frac{(x\pm iy)(4z^2-x^2-y^2)}{z^3}$$

$$Y_{3,0} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}}\frac{z(2z^2-3x^2-3y^2)}{z^3}$$

Вспомним базис

$x^2y - \frac{1}{3}y^3$ v

$x^2z - \frac{1}{3}z^3$ v

$xz^2 - \frac{1}{3}x^3$ v

$xy^2 - \frac{1}{3}x^3$ v

$y^2z - \frac{1}{3}z^3$ v

$yz^2 - \frac{1}{3}y^3$

xyz v

$$Y_{32} - Y_{3-2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}}\frac{4xyzi}{z^3}$$

* $xyz = -i\sqrt{\frac{2\pi}{105}}\left(Y_{32} - Y_{3-2}\right)z^3$

$$Y_{3-3} - Y_{33} = \frac{1}{8z^3}\sqrt{\frac{35}{\pi}}\left(2x^3 - 6xy^2\right)$$

* $xy^2 - \frac{1}{3}x^3 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{35}}\left(Y_{33} - Y_{3-3}\right)z^3$

* $x^2y - \frac{1}{3}y^3 = i\frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{35}}\left(Y_{33} + Y_{3-3}\right)z^3$

$$\frac{z^3}{3} - \frac{x^2z + y^2z}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{7}}\,Y_{30}\,z^3$$

$$\frac{x^2z - y^2z}{2} = \sqrt{\frac{2\pi}{105}}\left(Y_{32} - Y_{3-2}\right)z^3$$

* $y^2z - \frac{z^3}{3} = -\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{7}}\,Y_{30}\,z^3 + \sqrt{\frac{2\pi}{105}}\left(Y_{32} + Y_{3-2}\right)z^3\right)$

* $x^2z - \frac{z^3}{3} = -\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{7}}z^3 Y_{30}\,z^3 - \sqrt{\frac{2\pi}{105}}\left(Y_{32} + Y_{3-2}\right)z^3\right)$

— ...

* $z^2x - \frac{x^3}{3} = -\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi}{35}}\left(Y_{3-3} - Y_{33}\right)z^3 + \sqrt{\frac{\pi}{21}}\left(Y_{31} - Y_{3-1}\right)z^3\right)$

* $z^2y - \frac{y^3}{3} = +i\left(\sqrt{\frac{\pi}{21}}\left(Y_{31} + Y_{3-1}\right)z^3 + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi}{35}}\left(Y_{33} + Y_{3-3}\right)z^3\right)$

Задачи

№5 Разложить на НП группы SO(3) на тензорах 3-рьего ранга в 3D пр-ве. Р-ть полностью симметричную часть. Приводима ли она?

Пусть $\mathcal{D}$ – представление группы вращения на тензорах третьего ранга в 3D-пространстве

т.е: $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{(1)} \otimes \mathcal{D}^{(1)} \otimes \mathcal{D}^{(1)}$

(эквивалентность $\mathcal{D}^{(1)} \sim \mathcal{D}^{v}$ показана на семинаре)

т.к. $\mathcal{D}^{v}$ – matrix (3×3), а $T^{k} = \bigotimes_{i=1}^{k} \cdot z_i \Rightarrow \dim \mathcal{D}^{T^3} = 3^3 = 27$

По формуле Клебша–Гордана для группы вращения

$$\mathcal{D}^{(l_1)} \otimes \mathcal{D}^{(l_2)} = \bigoplus_{|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} \mathcal{D}^{(j)}$$

(из лекций)

$\Rightarrow \mathcal{D}^{(1)} \otimes \mathcal{D}^{(1)} = \mathcal{D}^{(0)} \oplus \mathcal{D}^{(1)} \oplus \mathcal{D}^{(2)}$ и т.д.

т.е.

$$\mathcal{D}^{(1)} \otimes \mathcal{D}^{(1)} \otimes \mathcal{D}^{(1)} = (\mathcal{D}^{(0)} \oplus \mathcal{D}^{(1)} \oplus \mathcal{D}^{(2)}) \otimes \mathcal{D}^{(1)} =$$

$$= \mathcal{D}^{(0)} \otimes \mathcal{D}^{(1)} \oplus \mathcal{D}^{(1)} \otimes \mathcal{D}^{(1)} \oplus \mathcal{D}^{(2)} \otimes \mathcal{D}^{(1)} =$$

$$= \mathcal{D}^{(1)} \oplus \mathcal{D}^{(0)} \oplus \mathcal{D}^{(1)} \oplus \mathcal{D}^{(2)} \oplus \mathcal{D}^{(1)} \oplus \mathcal{D}^{(2)} \oplus \mathcal{D}^{(3)} =$$

$$= \mathcal{D}^{(0)} \oplus 3\mathcal{D}^{(1)} \oplus 2\mathcal{D}^{(2)} \oplus \mathcal{D}^{(3)}$$

$\mathcal{D}^{(0)}$ – скалярное пр-е, $\dim = 1$

$\mathcal{D}^{(1)}$ – векторное, $\dim = 3$

$\mathcal{D}^{(2)}$ – пр-е, построенное на тензорах 2-го ранга, $\dim = 5$

$\mathcal{D}^{(3)}$ – пр-е, –"– 3-го ранга, $\dim = 7$

(В общем случае $\dim \mathcal{D}^{(l)} = 2l+1$) НП – ортогон.

В произвольном тензоре T_{ijk} – 27 компонент ($27 = 3^3$; $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$)

В полностью симм. тензоре $S^{(3)} T_{ijk}$ – 10 компонент

$T_{111}, T_{222}, T_{333}, T_{123},$
$T_{112}, T_{113}, T_{221}, T_{223},$
$T_{331}, T_{332}.$

Всего 27 комп., нужно выбрать 10 комп. | обязательно должно входить пр-ие с максимальным моментом ($\mathcal{D}^{(3)}$) (по свойству НП)

$\Rightarrow S^{(3)} = \mathcal{D}^{(3)} \oplus \mathcal{D}^{(1)}$

Задачи

№6. 3б поправка в $\hat{H}$ имеет вид $V = \sum_{ijkl} T_{ijkl} J_i J_j J_k J_l$, где J - вектор угл. момента

T_{ijkl} - симметр. тензор

Сколько независим. комп.

Симметрия Δ C_{3v}.

Очевидно $C_{3v} \cong D_3$

(отражениям соответствуют повороты)

Воспользуемся тем, что у инвариантного тензора столько независимых комп., сколько раз единичное предст. входит в разложение тензорного представл. на НП.

Симм. тензоры образуют инвар. подпр-во под действ. элемент. группы

$\Rightarrow$ симм. по усл. тензор T_{ijkl} будет инвариантным

т.к. T_{ijkl} симметр. по $ijkl$

$\Rightarrow$ T_{ijk} симм. по ijk

т.е. симм. по 3м индекс.

Из №5 $\mathcal{D}^{(3)} \oplus \mathcal{D}^{(1)}$ — симм. часть тензора III р. в 3D-пр-ве

Тогда симм. часть T_{ijkl}

$$\mathcal{D}^{(1)} \otimes (\mathcal{D}^{(3)} \oplus \mathcal{D}^{(1)})$$

Применим ф-лы Клебша-Гордана (получен. на лекции)

т.к. $\mathcal{D}_3 < SO(3)$:

$$\mathcal{D}^{(1)} \otimes (\mathcal{D}^{(3)} \oplus \mathcal{D}^{(1)}) =$$

$$= \mathcal{D}^{(1)} \otimes \mathcal{D}^{(3)} \oplus \mathcal{D}^{(1)} \otimes \mathcal{D}^{(1)} =$$

$$= \mathcal{D}^{(0)} \oplus \mathcal{D}^{(1)} \oplus 2\mathcal{D}^{(2)} \oplus \mathcal{D}^{(3)} \oplus \mathcal{D}^{(4)}$$

Размерность симметричной части в ND-пр-ве на тензорах p-ранга есть

$$C^p_{p+n-1} = \frac{(p+n-1)!}{p!(n-1)!}$$

(из семинара)

В нашей задаче $N = 3$, $p = 4$

$$dim = \frac{(3+4-1)!}{4!(3-1)!} = 15$$

В симметр. часть входят предст. с максим. моментом

$$\Rightarrow \mathcal{D}^{(0)} \oplus \mathcal{D}^{(2)} \oplus \mathcal{D}^{(4)}$$

$\Rightarrow \mathcal{D}^{(0)} \oplus \mathcal{D}^{(2)} \oplus \mathcal{D}^{(4)}$

Матрица для $SO(3)$ верно

$$\chi_\phi^{(l)}(\varphi) = \frac{\sin(l+\frac{1}{2})\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi}$$

(из лекций)

В нашей задаче: $\varphi = \pi, \frac{2\pi}{3}$

	$\{e\}$	$\{R, R^2\}$	$\{P, PR, PR^2\}$
$\chi^{(0)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	5	-1	1
$\chi^{(4)}$	9	0	1

Вспомним таблицу характеров для D_3:

	$\{e\}$	$\{R, R^2\}$	$\{P, PR, PR^2\}$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

Тогда

$\mathcal{D}^{(2)}$: $k_1 = \frac{1}{6}(5-2+3) = 1$

$k_2 = \frac{1}{6}(5-2-3) = 0$

$k_3 = \frac{1}{6}(10+2) = 2$

$\mathcal{D}^{(4)}$: $k_1 = \frac{1}{6}(9+0+3) = 2$

$k_2 = \frac{1}{6}(9+0-3) = 1$

$k_3 = \frac{1}{6}(18+0+0) = 3$

$\mathcal{D}^{(0)}$: $k_1 = \frac{1}{6}(1+2+3) = 1$

$k_2 = \frac{1}{6}(1+2-3) = 0$

$k_3 = \frac{1}{6}(2-2+0) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_1 \oplus 2\mathcal{D}_3 \oplus 2\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}_3$

$\boxed{4\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus 5\mathcal{D}_3}$

$\Rightarrow$ Число независимых компонент $= 4$

Задачи

№ 7 Две переменные преобразуются веществ. matrix из группы $G = SL(2)$:

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1$$

- Найти генераторы $\hat{I}_1 \hat{I}_2 \hat{I}_3$ гр. G в пр-ии на ф-ях $\omega(z_1 z_2)$ их коммутац. соотн.
- Найти с.ф оператора Казимира
- Повышающ и Понижающ оператор для $\hat{I}_3$

Из условия $ad - bc = 1$ выразим $d = \frac{1+bc}{a}$

По определению $I = \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{x=0}$

Найдем $\hat{I}_1 \hat{I}_2 \hat{I}_3$

$$e = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = 1.$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\partial g(a, bc)}{\partial a}\Big|_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{I}_2 = \frac{\partial g}{\partial b}\Big|_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{I}_3 = \frac{\partial g}{\partial c}\Big|_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ на функциях!

$$gf(z_1 z_2) = f(g^{-1}(z_1, z_2))$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$g(a,0,0)\,\omega(z_1, z_2) = \omega\left(g^{-1}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$$

другим генератор!

$$\hat{I}_1 \omega(z_1, z_2) = \frac{\partial}{\partial a}\left[\omega\begin{pmatrix} dz_1 - bz_2 \\ dz_2 - cz_1 \end{pmatrix}\right]_e^{\partial a} =$$

$$= \frac{\partial \omega}{\partial z_1}\cdot(-z_1) + \frac{\partial \omega}{\partial z_2}\cdot(z_2)$$

$$\hat{I}_2\, \omega(z_1, z_2) = \omega_{z_1}\cdot(-z_2) + \omega_{z_2}\cdot 0$$

$$\hat{I}_3\, \omega(z_1, z_2) = \omega_{z_1}\cdot 0 - z_1 \omega_{z_2}$$

$\Rightarrow$

$$\hat{I}_1 = -z_1 \partial_{z_1} + z_2 \partial_{z_2}$$

$$\hat{I}_2 = -z_2 \partial_{z_1}$$

$$\hat{I}_3 = -z_1 \partial_{z_2}$$

Найдем коммутац. соотн. ($z_1 z_2$ независимые)

$$[\hat{I}_1 \hat{I}_2] = \cancel{z_1 \partial_{z_1} z_2} \partial_{z_1} - z_2 \partial_{z_2} z_2 \partial_{z_1} - z_2 \partial_{z_1} z_1 \partial_{z_1} + \cancel{z_2 \partial_{z_1} z_2} \partial_{z_2} =$$

$$= -2\hat{I}_2$$

$$[\hat{I}_1 \hat{I}_3] = z_1 \partial_{z_1} z_1 \partial_{z_2} - 0 - z_1 \partial_{z_2} z_2 \partial_{z_2} + 0 = -2\hat{I}_3$$

$$[\hat{I}_2 \hat{I}_3] = \hat{I}_1$$

$\Rightarrow$

$$[\hat{I}_1, \hat{I}_2] = -2\hat{I}_2$$

$$[\hat{I}_1, \hat{I}_3] = -2\hat{I}_3$$

$$[\hat{I}_2, \hat{I}_3] = \hat{I}_1$$

По определению оператор казимира — квадратичная комбинация генераторов, коммутирует со всеми генераторами

(7) свойство

$[A, BC] = B[A,C] + [A,B]C$

$\hat{K} = c_{ij} \hat{I}_i \hat{I}_j$, по повтор индекс. суммирование $i,j = \{1,2,3\}$

$[\hat{I}_k, \hat{K}] = c_{ij}(\hat{I}_i [\hat{I}_k \hat{I}_j] - [\hat{I}_k \hat{I}_i]\hat{I}_j) = 0 \quad \forall k = \{1,2,3\}$

$\boxed{k=1}$: $c_{11} \cdot 0 + c_{12} \cdot 2\hat{I}_1\hat{I}_2 + c_{13}(-2)\hat{I}_1\hat{I}_3 + c_{21}\cdot 2\hat{I}_2\hat{I}_1 + c_{22}\cdot 4 \hat{I}_2\hat{I}_2 + c_{23}\cdot 0 + c_{31}\cdot(-2)\hat{I}_3\hat{I}_1 + c_{32}\cdot 0 + c_{33}(-4)\hat{I}_3\hat{I}_3 = 0$

$\boxed{k=2}$: $c_{11}\cdot(-2)(\hat{I}_1\hat{I}_2 - \hat{I}_2\hat{I}_1) + c_{12}(-2)\hat{I}_2\hat{I}_2 + c_{13}(\hat{I}_1\hat{I}_1 - 2\hat{I}_2\hat{I}_3) + c_{21}(-2)\hat{I}_2\hat{I}_2 + 0 + c_{23}\hat{I}_2\hat{I}_1 + c_{31}((-2)\hat{I}_3\hat{I}_2 + \hat{I}_1\hat{I}_1) + c_{32}\hat{I}_1\hat{I}_2 + c_{33}(\hat{I}_3\hat{I}_1 + \hat{I}_1\hat{I}_3) = 0$

$\boxed{k=3}$: $c_{11} 2(\hat{I}_1\hat{I}_3 + \hat{I}_3\hat{I}_1) + c_{12}(\hat{I}_1\hat{I}_1 + 2\hat{I}_3\hat{I}_2) + c_{13} 2\hat{I}_3\hat{I}_3 + c_{21}(2\hat{I}_2\hat{I}_3 - \hat{I}_1\hat{I}_1) + c_{22}(-\hat{I}_2\hat{I}_1 - \hat{I}_1\hat{I}_2) + c_{23}(-\hat{I}_1\hat{I}_3) + c_{31} 2\hat{I}_3\hat{I}_3 + c_{32}(-\hat{I}_3\hat{I}_1) = 0$

$\Rightarrow c_{32} = c_{23} = 2c_{11} \neq 0$

иначе $c_{ij} = 0$

$\Rightarrow \hat{K} = \hat{I}_1^2 + 2\hat{I}_2\hat{I}_3 + 2\hat{I}_3\hat{I}_2$

$\hat{K} = z_1\partial_{z_1} z_1\partial_{z_1} - 2z_1\cancel{\partial_{z_1} z_2\partial_{z_2}} + z_2\partial_{z_2} z_2\partial_{z_2} + 2z_2\partial_{z_1} z_1\partial_{z_2} + 2z_1\partial_{z_2} z_2\partial_{z_1}$

$= z_1\partial_{z_1} + z_1^2\partial^2_{z_1 z_1} + z_2\partial_{z_2} + z_2^2\partial^2_{z_2 z_2} + 2z_2\partial_{z_2} + 2z_1\partial_{z_1} + 2z_1 z_2\partial_{z_1 z_2} =$

$\hat{K} = 3z_1\partial_{z_1} + 3z_2\partial_{z_2} + (z_1\partial_{z_1} + z_2\partial_{z_2})^2$

Найдем с.зн. и с.ф $\hat{K}$:

$\hat{K}\omega = \lambda\omega$, $\omega = A(z_1)B(z_2)$

$z_1 \equiv x$, $z_2 \equiv y$

$3z_1 A'B + 3z_2 AB' + z_1^2 A''B + 2z_1 z_2 A'B' + z_2^2 AB'' = \lambda AB$

$\alpha = \frac{z_1}{z_2}$, $\beta = z_2$

$u_x = u_\alpha \frac{1}{y}$ $\quad u_{xx} = u_{\alpha\alpha}\frac{1}{y^2}$

$u_{xy} = -u_{\alpha\alpha}\frac{x}{y^3} + u_{\alpha\beta}\frac{1}{y} - u_\alpha\frac{1}{y^2}$

$u_y = -u_\alpha \frac{x}{y^2} + u_\beta$

$u_{yy} = u_{\alpha\alpha}\frac{x^2}{y^4} - u_{\alpha\beta}\frac{x}{y^2} + 2u_\alpha\frac{x}{y^3} - u_{\alpha\beta}\frac{x}{y^2} + u_{\beta\beta}$

$\Rightarrow \beta^2 u_{\beta\beta} + 3\beta u_\beta = \lambda u$

$u = A(\alpha)B(\beta)$ $\quad B(\beta) = \beta^n$

$\Rightarrow (n(n-1) + 3n - \lambda)\beta^n A(\alpha) = 0$

$n = -1 \pm \sqrt{1+\lambda}$, $\lambda \geq -1$

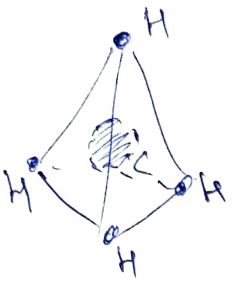
$u_\lambda = C_1 A\left(\frac{z_1}{z_2}\right) z_2^{-1+\sqrt{1+\lambda}} + C_2 A\left(\frac{z_1}{z_2}\right) z_2^{-1-\sqrt{1+\lambda}}$

с.ф. оператора казимира

$[\hat{I}_1, \hat{I}_\pm] = \pm c\hat{I}_\pm$, $c = 2$ $\quad \hat{I}_+ = \hat{I}_2$, $\hat{I}_- = \hat{I}_3$

Задачи

№8 Вывести правила отбора для матричных элементов электрического дип. момента в метане CH_4 для переходов между состояниями, которые пр-ся по НП



Молекула метана представляет собой правильный тетраэдр.

из №3:

Γ	(1) σ_1	(8) σ_2	(3) σ_3	(6) σ_4	6 σ_5
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	2	-1	2	0	0
$\chi^{(4)}$	3	0	-1	1	-1
$\chi^{(5)}$	3	0	-1	-1	1

инверс

Матричный элемент $O_{fi} = \int \langle f | \hat{O} | i \rangle$ преобразуется по прямому произведению

$$D = D_f^* \otimes D_O \otimes D_i,$$

которое можно разложить по НП какой-н. группы G

$$(*) \quad D = \bigoplus_k a_k D^{(k)}$$

Th (Л.Л. III §97)

$O_{fi} = 0$, если в разложении $(*)$ не входит единичное представление

ЭДМ $\vec{d} = e\vec{r}$ – вектор $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ преобразуется по D^v

Найдем D^v: $\chi^{(4)}$ или $\chi^{(5)}$

χ^4: $D(\sigma^4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ оси xy в зерк. пл-ти

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(\sigma_5) = T D(\sigma_4) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow D^v = D^{(4)}$

$$D = D^{(j')} \otimes D^{(4)} \otimes D^{(j)} = \bigoplus \sum k_\alpha D_\alpha,$$

$$k_\alpha = \begin{cases} 1, & |j'-j| < \alpha < j+j' \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Матричный элемент равен нулю, коэф. при единичном пр-ии.

В данной задаче – это k_1

i	$\chi_i \chi_4 \chi_i$	k_1
$1 \leftrightarrow 1$	3 | 0 | -1 | 1 | -1	$\frac{1}{24}(3-3+6-6)=0$
$2 \leftrightarrow 1$	3 | 0 | -1 | 1 | -1	0
$3 \leftrightarrow 1$	6 | 0 | -2 | 0 | 0	0
$3 \leftrightarrow 2$	6 | 0 | -2 | 0 | 0	0
$* 4 \leftrightarrow 1$	9 | 0 | 1 | 1 | 1	$\frac{1}{24}(9+3+6+6)=1$
$5 \leftrightarrow 1$	9 | 0 | 1 | -1 | -1	0
$* 5 \leftrightarrow 2$	9 | 0 | 1 | 1 | 1	1
$* 4 \leftrightarrow 4$	27 | 0 | -1 | 1 | -1	$\frac{1}{24}(27-3+6-6)=1$
$* 3 \leftrightarrow 4$	18 | 0 | 2 | 0 | 0	1
$* 5 \leftrightarrow 3$	18 | 0 | 2 | 0 | 0	1
$* 5 \leftrightarrow 4$	27 | 0 | -1 | -1 | 1	$\frac{1}{24}(18+6)=1$
$* 5 \leftrightarrow 5$	27 | 0 | -1 | 1 | -1	1

$\Downarrow$

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
D_1	O	O	O	*	O
D_2	O	O	O	O	*
D_3	O	O	O	*	*
D_4	*	O	*	*	*
D_5	O	*	*	*	*