Функции Грина

fuodorov.github.io

$$\begin{cases}\hat L u|_G = f \\ \hat B u|_S = g\end{cases}$$ Самая общая постановка

$S=\partial D$

ДСР

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}\hat L u_1 = f\\ \hat B u_1|_S=0\end{cases} + \begin{cases}\hat L u_2 =0\\ \hat B u_2|_S = g\end{cases}$$

Полуоднородные задачи №1 и №2

Разложение оператора по проекторам

$\hat L u(x) = \int_D k(x,x')\, u(x')\, dx'$ ↳ ядро оператора инт.

$k(x,x') = a_2\delta''(x-x') + a_1\delta'(x-x') + a_0\delta(x-x')$

Диф. оператор, если $\delta^{(n)}(x-x')$ обрывается

$\hat L\psi_n(x)=\lambda_n\psi_n(x)$ Спектр. задача

$\hat L = \hat L^+$ и $\lambda_n<0$

$\int \psi_m^*(x)\psi_n(x)\,dx=\delta_{mn}$ ортонорм.

$\sum \psi_n(x)\psi_n^*(x')=\delta(x-x')$ полнота

$\Rightarrow \hat k(x,x') = \sum \lambda_n \psi_n(x)\psi_n^*(x')$

$\rightarrow G(x,x') = \sum \frac{1}{\lambda_n}\psi_n(x)\psi_n^*(x')$

$\Rightarrow u_1(x) = \int_D G(x,x')\, f(x')\,dx'$ → ф-я Грина

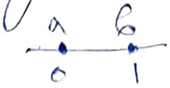
Интеграл Дюмеля

Т.к. мы находим отклик системы!

$\hat L G(x,x') = L\cdot\sum\frac{1}{\lambda_n}\psi_n(x)\psi_n^*(x') = \delta(x-x')$

А. Физ. смысл. т. x и x' → наблюдения, источник

$\hat L = p\,d_{xx} + q\,d_x + r$



$\hat L = \hat L^+$

Условие на самосопряж.

$\Rightarrow (v,\hat L u) = (\hat L^+ v, u)$

$\Rightarrow \int_0^1 v\hat L u\, dx = [\text{по частям}] = \dots$

$= \cancel{\int_0^1 (pv)'' u\, dx - \int_0^1 (qv)' u\, dx + \int}$

$pv''+2p'v'+p''v - qv' - q'v + rv =$

$= pv''+qv'+rv$

$\Rightarrow \boxed{\hat L = d_x(p\,d_x)}$ с/с оператор Ш/Л

$\hat L G = pG''+qG'+rG = \delta(x-x')$ (*)

Далее лок. интегр.

$\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} dx \Big\} \Rightarrow [G]_{x=x'}=0$ непрер.

$[G']_{x=x'} = 1/p(x')$ скачок произв.

Найдем ФСР:

$$g(x,x') = \begin{cases} a u_1(x), & x<x'\\ b u_2(x), & x>x'\end{cases}$$

где u_1 и u_2 л.н. решения

+ Условия (*):

$$\begin{cases} a u_1(x') - b u_2(x') =0\\ -a u_1'(x') + b u_2'(x') = \frac{1}{p(x')}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{u_2(x')}{p(x')\Delta(x')}$$

$$b = \frac{u_1(x')}{p(x')\Delta(x')}$$

$$\Rightarrow g(x,x') = \begin{cases}\frac{u_1(x)\,u_2(x')}{p(x')\Delta(x')}, & x<x'\\ \frac{u_1(x')\,u_2(x)}{p(x')\Delta(x')}, & x>x'\end{cases}$$

№249

Задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} - m^2u = f(x) \\ u(\infty) = u(-\infty) = 0 \end{cases}$$

ФСР: $\varphi_1 = e^{mx}$

$\varphi_2 = e^{-mx}$

Ур-е на ФГ:

$G'' - m^2 G = \delta(x-x')$

$\Rightarrow$ повк. инт. $\Rightarrow$

$\Rightarrow [G]_{x'} = 0, \quad [G']_{x'} = 1$

ГУ: $\begin{cases} Ae^{mx'} = Be^{-mx'} \\ -mBe^{-mx'} - mAe^{mx'} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow G(x,x') = -\dfrac{1}{2m} e^{-m|x-x'|}$

$\Rightarrow u(x) = -\int \dfrac{1}{2m} e^{-m|x-x'|} f(x')dx'$

Можно решить по формуле

$$G(x,x') = \frac{\varphi_1(x_<)\varphi_2(x_>)}{p(x')\,W(x')}$$

коэф. при второй произв. $\leftarrow$ $\hookrightarrow$ вронскиан

$$W(x) = \frac{d\varphi_2(x)}{dx}\varphi_1(x) - \frac{d\varphi_1}{dx}\varphi_2(x)$$

№252

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + k^2u = f(x) \\ u(0) = u(1) \\ \dfrac{du}{dx}\Big|_{x=0} = \dfrac{du}{dx}\Big|_{x=1} \end{cases}$$

Аналогично:

$$G(x,x') = -\frac{\cos\left(k(x-x') - k\,\dfrac{\operatorname{sgn}(x-x')}{2}\right)}{2k\sin\frac{k}{2}}$$

Обобщенные функции Грина

Альтернатива Фредгольма

(1) $\hat{L} u = f$

(2) $\hat{L}^{+} v = 0$ сопр. однородн. задача

1°: (1) имеет ! решение $\Leftrightarrow$ (2) имеет только тривиальное решение $v \equiv 0$

2°: (2) имеет нетривиальные решения $v_k \not\equiv 0$, $k = 1, \dots k$

$\Rightarrow$ (1) разрешима $\Leftrightarrow$

$$(v_k, f) = 0, \quad k = 1, \dots k$$

В этом случае (1) имеет бесконечно много решений

Условно-обратный оператор

$$\hat{L}_0^{-1} = \sum_{k+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} |n\rangle\langle n|$$

$$\hat{L} G_0 = \underbrace{\sum_1^{\infty} \psi_n(x) \psi_n^*(x')}_{\text{из обобщ.}} - \sum_1^{k} \psi_n(x) \psi_n^*(x')$$

$$\hat{L} G_0 = \delta(x - x') - \sum_1^{k} \psi_n(x) \psi_n^*(x')$$

(*) к ОФГ можно добавить линейную комбинацию нулевых мод $\sum_1^k c_k \psi_k(x)$

Р-м. ОДУ:

$$\hat{L}_x u(x) = f(x)$$

с ГУ: $\hat{M}_k u = h_k$, $k = 1, \dots n$

$\exists$ нулевая мода $\varphi_0(x)$ |

$$\hat{L}_x \varphi_0(x) = 0$$
$$\hat{M}_k \varphi_0(x) = 0, \quad k = 1, \dots n$$

Возьмем $u_1(x)$ |

$$\begin{cases} \hat{L}_x v(x) = f(x) - \hat{L}_x u_1 \equiv \tilde{f}(x) \\ \hat{M}_k v = 0, \quad k = 1, \dots n \end{cases}$$

Т.к. $\hat{L}$ необратим ($\exists \lambda_i = 0$) нужно из нормированной моды $\int_a^b \varphi_0(x)\,dx = 1$ сделать проектор на подпр-во этой моды

$$P(x, x') = \varphi_0(x) \varphi_0(x')$$

$\Rightarrow$ ОФГ: в подпр-ве $\perp$ нулевой моде

$$\hat{L}_x G(x, x') = \delta(x - x') - \varphi_0(x) \varphi_0(x')$$
$$\hat{M}_k G(x, x') = 0, \quad k = 1, \dots n$$

Задачи

№228 $\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2}$

$u(0) = u(1)$

$u'(0) = u'(1)$

Сопряжен. однород. задача

$\hat{L}^+ v = 0 \;\Rightarrow\; v_0 = const.$

$\int_0^1 v_0\, dx \Rightarrow \quad u_0(x) = 1.$

Уравнение на ОФГ:

$\hat{L}\, G_0(x, x') = \delta(x - x') - \sum_1^k u_i\, \varphi_i^*(x')$

$G'' = \delta(x - x') - 1$

$[G']_{x'} = 1$ скачок.

$[G]_{x'} = 0$ непрерывность

$\hat{L} u = -1$

$u(x) = \underbrace{-\frac{x^2}{2}}_{\text{частное решение}} + C_1 x + C_2$

$g(x, x') = -\frac{x^2}{2} + \begin{cases} C_1 x + C_2, & x < x' \\ C_3 x + C_4, & x > x' \end{cases}$

ГУ + сшивка

$\Rightarrow$

№253 $\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + \pi^2$

$u(0) = u(1) = 0$

$\hat{L}^+ v = 0 \;\Rightarrow\; v_0 = C_2 \sin \pi x$

Ортонормиров.

$\int v^2\, dx = 1 \;\Rightarrow\; v_0 = \sqrt{2} \sin \pi x$

Усл. разрешимости: $(v_k, f) = 0$

$\int_0^1 f(x) \sqrt{2} \sin \pi x = 0$

Ур-е на ОФГ

$G'' + \pi G = \delta - 2 \sin \pi x \sin \pi x'$

$\Rightarrow$ Неоднор. ур-е:

$g_0(x, x') = \frac{1}{\pi} x \sin \pi x' \cos \pi x +$

$+ \begin{cases} C_1 \cos \pi x + C_2 \sin \pi x, & x < x' \\ C_3 \cos \pi x + C_4 \sin \pi x, & x > x' \end{cases}$

Сшивка

+

Ортогон. ОФГ

$\int \sqrt{2} \sin \pi x\, G_0(x, x')\, dx = 0$

Функции Грина эллиптических уравнений

$\Delta u = f(x)$ Пуассон

$\Delta u = 0$ Лаплас

$u|_S = 0$ Дирихле

$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0$ Нейман

Принцип max! (для Дирихле)

Гармоническая в D ф-я непрерывная вплоть до границы может достигать max только на границах

$\square$ $M = \max_{x\in D} u(x)$ $m = \max_{x\in S} u(x)$

в точке x_0

$\exists$ $M > m$, $v(x) = u(x) + \frac{M-m}{2d^2}(x-x_0)^2$

$\Rightarrow v|_S \le \cancel{\max u}^{\,m} + \frac{M-m}{2d^2}\cdot d^2$

$v|_S \le \frac{M+m}{2} < M$

$v(x)$ достигает max в D

$\Delta v = \cancel{\Delta u}^{\,0} + \Delta \frac{M-m}{2d^2}(x-x_0)^2 = \frac{M-m}{2d^2} 2\cdot n$

С другой стороны

$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2} \le 0$ т.к. max

$\blacksquare$

Аналог. Принцип $\Downarrow$ min

Единственность!

$\exists$ $\Delta u_1 = f$ и $\Delta u_2 = f$

$u_1|_S = g$ и $u_2|_S = g$

$u = u_1 - u_2 \Rightarrow \Delta u = 0$ $u|_S = 0$

$u_1 = u_2$. $\Leftarrow u \equiv 0$ $\Leftarrow$ принцип

Функция Грина II рода (для Неймана)

$u(x) = \int_S G_2(x,x')\, g(x')\, dx'$

для $\begin{cases} \hat{L}u = 0 \\ \hat{B}u|_S = g \end{cases}$

$\exists$ $\hat{L} = \Delta$: $(v, \Delta u) - (u, \Delta v) =$ ($n=3$)

$= \int_D v\Delta u - u\Delta v\, dV = \int_D \nabla(v\nabla u - u\nabla v)\, dV$

$\pm \nabla u \nabla v$

$= \int_S (v\nabla u - u\nabla v)\, d\vec{S} =$

$= -\int_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS$

Задачи

№256 $\begin{cases} \Delta u(\vec r) = f(\vec r) & \text{ур. Пуассона} \\ u(\infty) = 0 & \text{зад. Дирихле} \end{cases}$

Нет нулевых мод!

$$\Rightarrow \Delta G(\vec r, \vec r\,') = \delta(\vec r - \vec r\,')$$

из соображений симметрии

$$\vec R = \vec r - \vec r\,' \Rightarrow \operatorname{div} \vec\nabla G(R) = \delta(r)$$

В сф. СК. $\dim = n$

по шару R:

$$\int_{R'\le R} \operatorname{div}_{R'} \vec\nabla G(R')\, dR' = 1 =$$

$$= \oint_{R'=R} \vec\nabla G(\vec R)\, d\vec S = \frac{\partial G(R)}{\partial R} \oint_{R'=R} (\vec n \cdot d\vec S)$$

$$= \frac{\partial G(R)}{\partial R} \cdot \underbrace{S_n}_{\text{площадь „сферы"}} = \frac{\partial G(R)}{\partial R} \cdot \left(R^{n-1} \cdot \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac n2)} \right)$$

Итого: $\dfrac{\partial G}{\partial R} \cdot R^{n-1} \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$

$$\Rightarrow dG = \frac{dR}{R^{n-1}} \cdot \frac{\Gamma(\frac n2)}{2\pi^{n/2}}$$

$\Gamma(\frac12) = \sqrt\pi$
$\Gamma(\frac32) = \frac12 \sqrt\pi$

$n=1: \quad G(R) = \frac12 R$

$n=2: \quad G(R) = \dfrac{\ln R}{2\pi}$

$n=3: \quad G(R) = -\dfrac{1}{4\pi R}$

$n>2: \quad G(R) = -\dfrac{1}{\Omega_n (n-2) R^{n-2}}$

$$\Rightarrow u(\vec r) = \int G(r, r') \cdot f(r')\, dr'$$

№257 $\begin{cases} \Delta u(r) = f(r) & \text{ур. Пуассона (зад. Дирихле)} \\ z > 0 \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y) \end{cases}$

ФГ строится методом изображений

Формально!
ФГ = поле от точечного заряда

$$\Rightarrow G(r, r') = -\frac{1}{4\pi|r - r'|} + \frac{1}{4\pi|r - r''|}$$

Умножая $\Delta u(r) = f(r)$ на ФГ и проинтегр.

$$\int_{z'>0} f(\vec r\,') G(r, r')\, dr' = \int \operatorname{div}_{r'} \nabla_{r'} u(r') G$$

$$= \int dx' dy' \frac{u(x', y', 0)}{\varphi(x'y')} \frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{z'=0} + \ldots$$

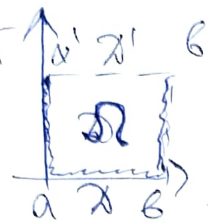
$$\Rightarrow u(\vec r) = \int_{z'>0} f(\vec r\,') G(\vec r, \vec r\,')\, dr' + \int_{z'=0} dx' dy' \varphi(x'y') G_{II}$$

Функции Грина параболических ур-ий

Нестац. уравнения

Единственность

(*) $u_t = u_{xx}$ ур. теплопровод.



$\gamma = (a', b')$

$\Pi = (a,b) \cup (a,a') + (b,b')$

$\gamma \cup \Pi = \partial\Omega$

Принцип максимума для УТ

Функция, удовл. (*) может достигать max только на границе Π

□ ∃ $M = \max\limits_{\Omega\cup\gamma} u(x,t)$

$m = \max\limits_{\Pi} u(x,t)$

Пусть $M > m$

$v(x,t) = u(x,t) + \frac{(x-x_0)^2}{2(b-a)^2}(M-m)$

$v|_\Pi \le \cancel{u|_\Pi}^{\,m} + \frac{M-m}{2} = \frac{M+m}{2} < M$

max v достигается тоже в Ω

В этой точке

$v_t - v_{xx} = \underbrace{u_t - u_{xx}}_{0} - \frac{M-m}{(b-a)^2} < 0$

с другой стороны

(а) $\in \gamma$ $\quad v_t = 0 \quad v_x > 0, \; v_{xx} \le 0$

$v_t - v_{xx} \ge 0$ ↯

(б) $\in \Omega$ $\quad v_t = 0, v_x = 0, \; v_{xx} \le 0$

$v_t - v_{xx} \ge 0$ ↯

Аналогично Принцип Min

∃ u_1 и u_2 решения $u_t = u_{xx}$ $\quad u|_{t=0} = 0$

$\Rightarrow u = u_1 - u_2$; из принц. max и min

Ф-я Грина II рода

(1) $u_t = \Delta u + f(x,t)$, $u|_{t=0} = 0$

(2) $u_t = \Delta u$, $u|_{t=0} = h(x)$

(1) ⇐ ФГ I рода

$G_t = \Delta G + \delta(x-x')\delta(t-t')$

$G_{t=0} = 0$

$\Rightarrow u(x,t) = \int\limits_\Omega G(x,t;x',t') f(x',t') dx'dt'$

(2) ⇐ ФГ II рода

$u(x,t) = \int\limits_D G_S(x,x',t) h(x') dx'$

$G_S(x,x',t') = G(x,t,x',t')\Big|_{t'=0} =$

$= G(x,t,x',0)$

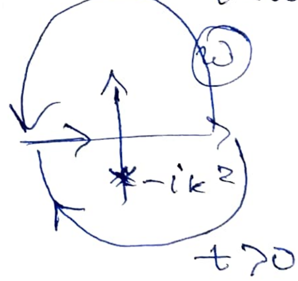
Формула Пуассона

$x - x' \to x, \quad t - t' \to t$

пр. Фурье $\partial_t \to -i\omega, \; \partial_x \to ik$

$-i\omega G_{k\omega} = -k^2 G_{k\omega} + 1$

$G_{k\omega} = \frac{1}{k^2 - i\omega}$



$G_k(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - i\omega}\frac{d\omega}{2\pi}$

$= \frac{-2\pi i}{-i}\frac{1}{2\pi} e^{-k^2 t} \cdot \theta(t)$

$G(x,t) = \theta(t)\int e^{ikx - k^2 t}\frac{dk}{(2\pi)^n}$

$= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n} e^{-\frac{x^2}{4t}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{t}}\right)^n$

$G(x,t,x',t') = \frac{\theta(t-t')}{(4\pi(t-t'))^{n/2}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4(t-t')}}$

№238 $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = h(x) \end{cases}$

НУ можно учесть в ур-ии

$u_t = u_{xx} + h(x)\cdot\delta(t)$

т. к. $\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dt \Big| \Rightarrow u(x,0) = h(x)$

НУ не меняется

Необходимая задача:

$w_t = w_{xx} + f(x,t)$, $w(x,0) = h(x)$

$w = v + u$, где $v_t = v_{xx} + f(x,t)$, $v(x,0) = 0$

$u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = h(x)$

ФГ I рода

$G_t - G_{xx} = \delta(x-x')\delta(t-t')$

$G|_{t=0} = 0$

$\Rightarrow v(x,t) = \int\limits_{\Omega} G(x,t,x',t') f(x',t')dx'dt'$

ФГ II рода: $G_s(x,x',t)$

$\Rightarrow u(x,t) = \int\limits_{D} G_s(x,x',t) h(x')dx'$

с др. стороны

$\Rightarrow f(x',t') = h(x')\delta(t')$ для $u(x,t)$,

то $u(x,t) = \int\limits_{\Omega} G(x,t,x',t') h(x')\delta(t')dx'dt'$

$\Rightarrow u(x,t) = \int\limits_{D} G(x,t,x',0) h(x')dx'$

т.е. $\boxed{G_s(x,x',t) = G(x,t,x',0)}$

Функции Грина Гиперболических ур-ний

Неоднор. уравн.

Волновое уравнение

$$\Box = \partial_{tt} - \Delta$$

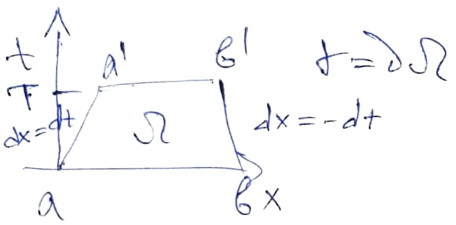
$$\Box u = 0$$

Единственность

$$u_t * \Big| \quad u_t u_{tt} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} u_t^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2}\right) - u_x u_{xt} - u_t u_{xx} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{u_x^2 + u_t^2}{2} - \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_t) = 0$$



$t = \partial\Omega$

$$0 = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_x^2+u_t^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_t)\, dx\, dt =$$

$$= \oint \frac{u_x^2+u_t^2}{2}\, dx + u_x u_t\, dt.$$

$$\int_a^b \frac{u_x^2+u_t^2}{2}\, dx = E \geq 0 \quad \text{энергия}$$

$$\int_{a'}^{b'} \frac{u_x^2+u_t^2}{2}\, dx = E' \geq 0$$

$$E \to \int_b^{b'} - E' + \int_{a'}^{a} = 0$$

$$\int_b^{b'} \frac{u_x^2+u_t^2}{2}\, dt + u_x u_t\, dt = -\int_0^T dt\, \frac{(u_x-u_t)^2}{2}$$

$$\int_{a'}^{a} = -\int_0^T \frac{(u_x+u_t)^2}{2}\, dt.$$

$$E' = \dots \leq E$$

$$\Rightarrow E = 0 \Rightarrow E' = 0$$

ФГ II рода

$$\Box u = f(x,t)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$$

$$\Box G = \delta(x-x')\,\delta(t-t')$$

$$G|_{t=0} = G_t|_{t=0} = 0$$

$$u(x,t) = \iint dx'\,dt'\; G(x,t,x',t')\, f(x',t')$$

$$\Box u = 0$$

$$u|_{t=0} = h(x)$$

$$u_t|_{t=0} = p(x)$$

$$u(x,t) = \int_D G_S^{(1)}(x,x';t)\, h(x')\, dx' + \int_D G_S^{(2)}(x,x';t)\, p(x')\, dx'$$

Ф-ла Грина: $(u, \Box G) - (G, \Box u)^{0}$

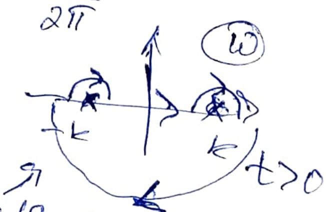
$$u(r't') = \iint (u G_{tt} - G u_{tt}) - (u \Delta G - G\Delta u)$$

Запазд. ф-я Грина $k=3$

$$(-\omega^2 + k^2)\, G_{k\omega} = 1$$

$$G_k(t) = \int \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 - \omega^2}\frac{d\omega}{2\pi}$$

Правила обхода полюсов



запаздывающая ФГ

$$= \left(\frac{e^{-ikt}}{-2k} + \frac{e^{+ikt}}{+2k}\right)\frac{(-2\pi i)}{2\pi}\,\theta(t)$$

$$G(\vec r, t) = \int \frac{e^{i\vec k\vec r}}{2k}\left(e^{ikt} - e^{-ikt}\right)\frac{\theta(t)\, d\vec k}{2\,(2\pi)^3}$$

$$\vec k\vec r = kr\cos\theta$$

$$G(\vec r, t, \vec r', t') = \frac{\theta(t-t')}{4\pi|\vec r - \vec r'|}\,\delta\big(|\vec r - \vec r'| - (t-t')\big)$$

Задачи

Задачи

№9. Найти функцию Грина и решение

$$(*)\begin{cases} y''' = f(x) \\ y(0) = a \\ y(1) = 0 \\ y'(0) + y'(1) = 0 \end{cases}$$

При каких a задача разрешима

* Задача дана в общей форме

Разобьем на две подзадачи.

$$\begin{cases} \hat{L} u(x) = 0 \\ \hat{B} u(x)\big|_S = g(x) \end{cases} + \begin{cases} \hat{L} v(x) = f(x) \\ \hat{B} v(x)\big|_S = 0 \end{cases}$$

II тип   I тип

$\Rightarrow$ Решение $*$ будет функ.

$$y(x) = u(x) + v(x)$$

II тип. Очевидно, решение:

$$u(x) = Bx^3 + Cx^2 + Dx + a$$

$$u(1) = 0 = B + C + D + a$$

$$u'(0) + u'(1) = 0 = 3B + 2C + 2D$$

$$B = 2a \qquad C \text{ - любая} \Rightarrow C = 0$$

$$D = -3a$$

$$\Rightarrow u(x) = 2ax^3 - 3ax + a$$

I тип Р-м задачку:

$$\begin{cases} \hat{L} v(x) = f(x) \\ \hat{B} v(x)\big|_S = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Проверим на наличие нулевых мод по Th. Фредгольма}$$

$\hat{L} = d_{xxx}$: $\hat{L}^* - ?$

$$(Lx, y) = (x, L^* y)$$

$$\int_0^1 x''' y \, d\xi = \left(y x'' - \int x'' dy \right)\Big|_0^1 =$$

$$= \left(y x'' - \int x'' y' d\xi \right)\Big|_0^1 = \ldots =$$

$$= \cancel{y x''}^{\to 0} - \cancel{y' x'}^{\to 0} + \cancel{y'' x}^{\to 0} - \int_0^1 x y''' d\xi$$

в силу ГУ

$$\Rightarrow L^* = -L$$

для Th. Фредгольма:

$$L^* v = 0 \,, \text{ при } v_0(x) = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

нулевая мода

Сооружаем проектор на подпр-во

ГУ: $\begin{cases} v_0'(0) + v_0'(1) = 2C_1 + C_2 + C_2 = \\ v_0(0) = C_3 = 0 \\ v_0(1) = C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$

$$v_0(x) = C_1 (x^2 - x)$$

Отнормируем!

$$C_1^2 \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2) \, dx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_1^2} = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow v_0(x) = \sqrt{30} \, (x^2 - x)$$

Соберем уравнение на обобщен. функцию Грина

$$\begin{cases} L\mathcal{G} = \delta(x-x') - 30(x^2-x)(x'^2-x') \\ \mathcal{G}(0) = \mathcal{G}(1) = 0 \\ \mathcal{G}'(0) + \mathcal{G}'(1) = 0 \end{cases}$$

частное реш.

$$\Rightarrow \mathcal{G} = -30(x'^2-x')\left(\frac{x^5}{60} - \frac{x^4}{24}\right) + \begin{cases} A_1x^2+B_1x+C_1, & x<x' \\ A_2x^2+B_2x+C_2, & x>x' \end{cases}$$

Найдем условие на $\mathcal{G}$ с помощью лок. интегр. $\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} dx$

$$\Rightarrow [\mathcal{G}]_{x'} = 0, \quad [\mathcal{G}']_{x'} = 0, \quad [\mathcal{G}'']_{x'} = 1$$

+ ГУ

$[\mathcal{G}'']_{x'} = 1 \Rightarrow 2A_2 - 2A_1 = 1$

$[\mathcal{G}']_{x'} = 0 \Rightarrow 2A_2x' + B_2 = 2A_1 + B_1$

$[\mathcal{G}]_{x'} = 0 \Rightarrow A_2x'^2 + B_2x' + C_2 = A_1x'^2 + B_1x' + C_1$

$\mathcal{G}(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$\mathcal{G}(1) = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}(x'^2-x') + A_2 + B_2 + C_2 = 0$

$\mathcal{G}'(0) + \mathcal{G}'(1) = 0 \Rightarrow B_1 + \frac{5}{2}(x'^2-x') + 2A_2 + B_2 = 0$

$\Rightarrow A_1 = A_2 - \frac{1}{2}$

$B_1 = B_2 + x'$

$C_2 = x'(A_1x' + B_1 - A_2x' - B_2) = \frac{x'^2}{2}$

$A_1 + B_1 = -\frac{5}{4}x'^2 + \frac{7}{4}x' - \frac{1}{2}$

$A_2 + B_2 = -5/4\, x'^2 + 3/4\, x'$

(+) По построению

$\int_0^1 v_0 \mathcal{G}\, dx = 0$ т.е. $v_0 \perp \mathcal{G}$

$$0 = \sqrt{30}\Big[\int_0^1 (x^2-x)(-5)(x'^2-x')\cdot\left(\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4}\right) + \int_0^{x'} A_1(x^4-x^3) + B_1(x^3-x^2)\,dx + \int_{x'}^1 \big(A_2(x^4-x^3) + B_2(x^3-x^2) + C_2(x^2-x)\big)dx\Big] = \ldots$$

$A_1 = -\frac{9}{2}x'^5 + \frac{25}{4}x'^4 - \frac{5}{4}x'^2 - \frac{1}{2}$

$B_1 = \frac{9}{2}x'^5 - \frac{25}{4}x'^4 + \frac{7}{4}x'$

$C_1 = 0$

$A_2 = -\frac{9}{2}x'^5 + \frac{25}{4}x'^4 - \frac{5}{4}x'^2$

$B_2 = \frac{9}{2}x'^5 - \frac{25}{4}x'^4 + \frac{3}{4}x'$

$C_2 = \frac{x'^2}{2}$

Наконец-то,

$$\mathcal{G}(x,x') = -5(x'^2-x')\left(\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4}\right) + \left(-\frac{9}{2}x'^5 + \frac{25}{4}x'^4\right)(x^2-x) - \frac{5}{4}x'^2x^2 + \frac{3}{4}x'x + \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + x'x, & x<x' \\ \frac{x'^2}{2}, & x>x' \end{cases}$$

Th. Фред.

Найти a | задача разрешима т.е. $(v_0, f) = 0$

$\int_0^1 (x^2-x)(f(x) - 12a)\,dx = 0$

$\Rightarrow \int_0^1 (x^2-x)(f(x))\,dx = -2a$

$\Rightarrow a = \int_0^1 (x-x^2) f(x)\,dx$

Решение:

$$y(x) = \int_0^1 \mathcal{G}(x,x')(f(x') - 12a)\,dx' + 2ax^3 - 3ax + a$$

Задачи

№10 Найти функцию Грина

$$u_t = \chi \Delta_2 u + f(z,\varphi,t)$$

на поверхности цилиндра радиуса R

источник: $Q\,\delta(z - Vt)$

Вспомним:
В цилиндрич. коорд:

$$\Delta_2 = \cancel{\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r)} + \partial_{zz} + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}$$

здесь этого нет

$$\Rightarrow \Delta_2 = \partial_{zz} + \frac{\partial_{\varphi\varphi}}{R^2}$$

$$\Rightarrow u_t = \chi u_{zz} + \chi \frac{u_{\varphi\varphi}}{R^2} + f$$

Единственность решения для УТ доказана на лекциях

$\Rightarrow$ Подойдет обычная функция Грина уравнение на

т.е. $$G_t - \chi G_{zz} - \frac{\chi}{R^2} G_{\varphi\varphi} = \delta(z-z')\,\delta(\varphi-\varphi')\,\delta(t-t')$$

Т.к функция Грина ищется на поверхности цилиндра, то $G(\varphi+2\pi) = G(\varphi)$

также обозначим

$t-t' \to \tilde t$, $\varphi-\varphi' \to \tilde\varphi$, $z-z' \to \tilde z$

Т.к. период по φ ищем решение в виде

$$G(\tilde z,\tilde\varphi,\tilde t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} F_m(\tilde z,\tilde t)\, e^{im\tilde\varphi}$$

$m \in \mathbb{Z}$

А по св-ву δ функции

$$\delta(\tilde\varphi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{im\tilde\varphi}$$, тогда

$$\Rightarrow F_{m_t} - \chi F''_{m_{zz}} + \chi\frac{m^2}{R^2} F_m = \delta(\tilde z)\delta(\tilde t)$$

Далее возьмем Фурье-образ

$$f(x) = \int f(k)\, e^{ikx}\frac{dk}{2\pi}$$

$$f(k) = \int f(x)\, e^{-ikx}dx$$

в пр-ве ω, k

$$\Rightarrow -i\omega F_m + \chi k^2 F_m + \chi\frac{m^2}{R^2} F_m = 1$$

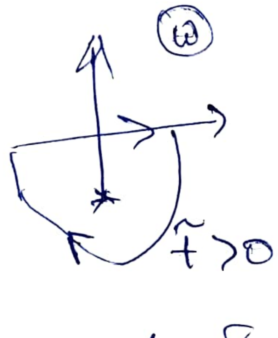
$$F_m(k,\omega) = \frac{1}{k^2\chi + \chi\frac{m^2}{R^2} - i\omega}$$

в пр-ве z, t

$$F_m(\tilde z,\tilde t) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{ikz - i\omega t}}{\chi(k^2+\frac{m^2}{R^2}) - i\omega}\, d\omega\, dk$$

Вычислим интеграл с помощью вычетов

Полюс $\Rightarrow$ $\omega_* = -i\chi\left(k^2+\frac{m^2}{R^2}\right)$



Чтобы интеграл сходился

при $t>0 \Rightarrow \operatorname{Im}\omega < 0$

$t<0 \Rightarrow \operatorname{Im}\omega > 0$

Должна убывать экспонента.

$$\Rightarrow F_m(k,\hat t) = \frac{-2\pi i}{2\pi}\cdot \underset{\omega=\omega_*}{\mathrm{Res}} \frac{e^{-i\omega \hat t}}{\varkappa(k^2+\frac{m^2}{R^2})-i\omega}\,\theta(\hat t)$$

$$F_m(k,\hat t) = e^{-\varkappa \hat t\left(k^2+\frac{m^2}{R^2}\right)}\cdot\theta(\hat t)$$

$$\Rightarrow F_m(\hat z,\hat t) = \frac{\theta(\hat t)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikz-\varkappa\hat t\left(k^2+\frac{m^2}{R^2}\right)}\,dk$$

интеграл Пуассона

$$=\left[ikz - \varkappa\hat t k^2 - \varkappa\hat t\frac{m^2}{R^2} = -\varkappa\hat t\left(k-\frac{iz}{2\varkappa\hat t}\right)^2 - \frac{\varkappa m^2}{R^2}\hat t - \frac{z^2}{4\varkappa\hat t}\right.$$

$$=\frac{\theta(\hat t)}{\sqrt{4\pi\varkappa\hat t}}\exp\left(-\frac{\varkappa m^2\hat t}{R^2}-\frac{z^2}{4\varkappa\hat t}\right)$$

Наконец-то,

$$G(z,z',t,t',\varphi,\varphi') = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\theta(t-t')}{\sqrt{4\pi\varkappa(t-t')}}\cdot\exp\left(-\left(\frac{\varkappa m^2(t-t')}{R^2}+\frac{(z-z')^2}{4\varkappa(t-t')}\right)\right)\cdot\exp(im(\varphi-\varphi'))$$

$$u=\int G(z,z',t,t',\varphi,\varphi')\,f(z',\varphi',t')\,dz'\,d\varphi'\,dt'$$

источник: $Q\,\delta(z-vt)$

$$u=\frac{Q}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\theta(t-t')\,e^{im(\varphi-\varphi')}}{\sqrt{4\pi\varkappa(t-t')}}\cdot\exp\left(-\frac{\varkappa(t-t')m^2}{R^2}\right)\exp\left(-\frac{(z-z')^2}{4\varkappa(t-t')}\right)\delta(z'-vt')$$

= | В силу периодичности не ноль будет только при $m=0$ |

= | т.к. δ функция $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$ |

= | $t-t'=\tau$, $d\tau=-dt'$ | =

$$= -\frac{Q}{\sqrt{4\pi\varkappa}}\int_0^\infty\frac{\theta(\tau)}{\sqrt\tau}\,e^{-\frac{(z-v(t-\tau))^2}{4\varkappa\tau}}$$

$$=-\frac{Q}{\sqrt{4\pi\varkappa}}\int_0^\infty\frac{d\tau}{\sqrt\tau}\,e^{-\frac{(v\tau+(z-vt))^2}{4\varkappa\tau}}=$$

$$=\left[-\left(v^2\tau^2+2v\tau(z-vt)+(z-vt)^2\right)\right.$$

$$=-\frac{Q}{\sqrt{4\pi\varkappa}}\,e^{-\frac{v(z-vt)}{2\varkappa}}\int_0^\infty e^{-\frac{(v\tau)^2+(z-vt)^2}{4\varkappa\tau}}\frac{d\tau}{\sqrt\tau}$$

$$\frac{v^2}{4\varkappa}\tau+\frac{(z-vt)^2}{4\varkappa}\frac1\tau \qquad \frac{d\tau}{\sqrt\tau}$$

$a\tau+b\frac1\tau$ вынесем a и b

$\tau\to\lambda\tau$ замена

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-\left(\lambda a\tau+\frac{b}{\lambda\tau}\right)}\frac{d\lambda\tau}{\sqrt{\lambda\tau}}$$

$$\lambda a=\frac b\lambda \Rightarrow \boxed{\lambda=\sqrt{b/a}}$$

$$\left(\frac ba\right)^{1/4}\int_0^\infty e^{-\sqrt{b/a}\,(\tau+1/\tau)}\frac{d\tau}{\sqrt\tau}$$

$$2\left(\frac ba\right)^{1/4}\int_0^\infty e^{-\sqrt{b/a}\left[\left(\sqrt\tau-\frac1{\sqrt\tau}\right)^2+2\right]}d\sqrt\tau$$

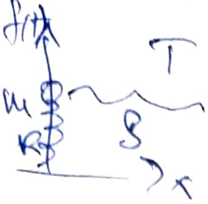
$$2\left(\frac ba\right)^{1/4}e^{-2\sqrt{b/a}}\int_0^\infty e^{-\sqrt{b/a}\,(\ )^2}d\sqrt\tau$$

$$\cancel{2\left(\frac ba\right)^{1/4}}\,e^{-2\sqrt{b/a}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{b/a}}} = e^{-2\sqrt{b/a}}\cdot\sqrt{\pi}$$

$$= -\frac{Q}{\sqrt{4\varkappa}}\,e^{-\left(\frac{v(z-vt)}{2\varkappa}+2\cdot\frac{(z-vt)}{v}\right)}$$

Задачи

№11 Найти ф-цию Грина II рода



$\mathcal{G}(x,t,t')$

(*) $\rho u_{tt}(x,t) = T u_{xx}(x,t)$

(**) $m u_{tt}(0,t) = -k u(0,t) + T u_x(0,t) + f(t)$

Сведем волновое ур. (*) к ОДУ и будем искать решение в виде бегущей волны:

$u=\varphi(x-ct)$: $u_{tt}=\varphi'' c^2$, $u_x=\varphi'$, $u_{xx}=\varphi''$

Подставим решение в (**)

$$mc^2\varphi''(-ct) = -k\varphi(-ct) + T\varphi'(\,)+f$$

$\xi=-ct$

$$\varphi''(\xi)mc^2 + k\varphi(\xi) - T\varphi'(\xi) = f(t)$$

$$\Rightarrow mc^2\varphi'' + (-T)\varphi' + k\varphi = 0$$

Хар-ий многочлен:

$$mc^2\lambda^2 - T\lambda + k = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{T\pm\sqrt{T^2-4mc^2k}}{2mc^2}$$

Функции Грина:

$\cancel{1^\circ\ \lambda_{1,2}\in\mathbb{R}}$

$c=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$, $\omega^2=\sqrt{\frac{k}{m}}$, $\gamma=\frac{\rho}{m}$

т.к. $\lambda_{1,2} = \frac{c^2\rho}{2mc^2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{m^2c^4} - \frac{4mc^2}{m^2c^4}k}$

$$= \frac12\Big(\gamma \pm \sqrt{\underbrace{\gamma^2 - 4\frac{\omega^2}{c^2}}_{D}}\Big)^2$$

Функция Грина:

$D>0$, $\gamma^2>4\frac{\omega^2}{c^2}$, $\lambda_{1,2}\in\mathbb{R}$

$$\lambda_{1,2}=\frac12\left(\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\frac{\omega^2}{c^2}}\right)$$

$$\mathcal{G}=\frac{1}{\sqrt{\gamma^2-4\frac{\omega^2}{c^2}}}\begin{cases} e^{\lambda_2(y-y')}-e^{\lambda_1(y-y')}, & y<y' \\ 0, & y>y'\end{cases}$$

$D<0$, $\lambda_{1,2}\in\mathbb{C}$, $\gamma^2<4\frac{\omega^2}{c^2}$

$$\lambda_{1,2}=\frac12\left(\gamma\pm i\sqrt{4\frac{\omega^2}{c^2}-\gamma^2}\right)$$

$$\mathcal{G}=\frac{2}{\sqrt{4\frac{\omega^2}{c^2}-\gamma^2}}\begin{cases} e^{\frac12\gamma(y-y')}\cdot\sin(\sqrt{\ldots}, & y<y' \\ 0, & y>y'\end{cases}$$

$D=0$, $\lambda_{1,2}=\frac{\gamma}{2}$

$$\mathcal{G}=\begin{cases} Ae^{\frac{\gamma}{2}(y-y')}+B(y-y')e^{\frac{\gamma}{2}(y-y')} \\ 0, & y>y'\end{cases}$$

$[\mathcal{G}]_{y'}=0 \Rightarrow A=0$

$[\mathcal{G}']_{y'}=1\Rightarrow B=1.$

$$\mathcal{G}=\begin{cases}(y-y')e^{\frac{\gamma}{2}(y-y')}, & y<y'\\ 0, & y>y'\end{cases}$$